ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTIÈME — ANNÉE 1943

(79e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1943

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTIÈME — ANNÉE 1943

(79e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1943

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : M. ÉTIENNE THOUZELLIER.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR

UNE CLASSE D'ESPACES DE WEYL

PAR M. ÉLIE CARTAN.

Dans un Mémoire paru récemment dans la *Revista hispano-americana* (¹) et consacré à l'étude géométrique des équations différentielles du troisième ordre $y''' = F(x, y, y', y'')$, envisagées par rapport au groupe des transformations ponctuelles du plan, j'ai rencontré une classe particulière d'équations susceptibles d'être associées à des espaces de Weyl à trois dimensions. Mais ces espaces de Weyl ne sont pas quelconques; ils jouissent de la propriété caractéristique d'admettre ∞^2 plans isotropes (²). Ils constituent une classe intéressante d'espaces de Weyl. Nous nous proposons dans cet article de caractériser le tenseur de courbure des espaces de cette classe et de déterminer leur degré de généralité. Ce dernier problème fait partie d'une classe de problèmes qui ont été bien rarement abordés. Le principe de la méthode que nous appliquerons peut servir dans des cas plus généraux. Le résultat fondamental obtenu est que les espaces de Weyl de la classe considérée dépendent *essentiellement* de quatre fonctions arbitraires de deux arguments (³). Ce sont donc des espaces très

(¹) Série 4, t. 1, 1941, p. 1-31.

(²) Si la forme fondamentale de l'espace de Weyl est définie positive, cette propriété n'a de sens que si l'espace est *analytique*; en fait, dans le problème auquel il est fait allusion dans le texte, la forme fondamentale était indéfinie. Nous supposons ici l'espace réel analytique.

(³) Le mot *essentiellement* sera précisé en temps utile.

exceptionnels si l'on songe que l'espace de Weyl le plus général dépend essentiellement de cinq fonctions arbitraires de trois arguments. Un théorème d'existence et d'unicité d'un énoncé géométrique simple illustre intuitivement le résultat obtenu (n° 12).

I. — Généralités sur les espaces de Weyl.

1. Nous nous placerons, pour la simplicité et la symétrie des calculs, dans le cas d'un espace de Weyl *analytique* à forme fondamentale définie positive. Conformément à la nature même des espaces de Weyl, nous attacherons à chaque point M de l'espace un trièdre trirectangle $(M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$ dont les trois vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont assujettis à avoir la même longueur (4). Ou plutôt nous attacherons au point M *tous* les trièdres d'origine M et dont les vecteurs sont rectangulaires entre eux et de même longueur. Ces trièdres dépendent de quatre paramètres, qu'il est inutile de préciser, et que nous appellerons *paramètres secondaires*, de sorte que lorsqu'on fait varier le point M, les trièdres attachés aux différents points de l'espace dépendent de 7 paramètres, dont les quatre paramètres secondaires et les trois coordonnées des points de l'espace (paramètres principaux).

Le passage d'un trièdre trirectangle $\mathfrak{T}$ à un trièdre infiniment voisin $\mathfrak{T}'$ se fait par une translation infinitésimale, dont nous désignerons les composantes rapportées à $\mathfrak{T}$ par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, par une homothétie de centre M dont nous désignerons le rapport par $1+\varpi$, et par une rotation infinitésimale autour de M, dont nous désignerons les composantes covariantes par $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$. On aura donc les formules, où D est le symbole de différentiation covariante,

$$(1)\quad \begin{cases} D\vec{M} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3, \\ D\vec{e}_1 = \varpi\vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2 - \omega_{31}\vec{e}_3, \\ D\vec{e}_2 = \varpi\vec{e}_2 + \omega_{23}\vec{e}_3 - \omega_{12}\vec{e}_1, \\ D\vec{e}_3 = \varpi\vec{e}_3 + \omega_{31}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2; \end{cases}$$

les sept formes différentielles $\omega_i, \varpi, \omega_{ij}$ sont linéaires par rapport aux différentielles des sept paramètres dont dépendent les trièdres de l'espace; les formes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ne font intervenir que les différentielles des paramètres principaux (5).

---

(4) Cela a un sens, tant qu'on reste en un même point de l'espace.

(5) En effet l'annulation de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ exprime qu'on reste au même point M de l'espace, c'est-à-dire que les différentielles des coordonnées ponctuelles (paramètres principaux) sont nulles.

2. Les *équations de structure* de l'espace sont

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\omega_1' = [\omega_1 \varpi] - [\omega_2 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{31}],\\
&\omega_2' = [\omega_2 \varpi] - [\omega_3 \omega_{23}] + [\omega_1 \omega_{12}],\\
&\omega_3' = [\omega_3 \varpi] - [\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_2 \omega_{23}],\\
&\varpi' = -\Pi,\\
&\omega_{23}' = [\omega_{12}\omega_{31}] - \Omega_{23},\\
&\omega_{31}' = [\omega_{23}\omega_{12}] - \Omega_{31},\\
&\omega_{12}' = [\omega_{31}\omega_{23}] - \Omega_{12};
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

les formes Π, Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} définissent la courbure de l'espace : ce sont des formes quadratiques extérieures en ω_1, ω_2, ω_3. Elles représentent une similitude infinitésimale associée à un cycle ponctuel infinitésimal de l'espace; cette similitude se décompose en une homothétie de rapport $1+\Pi$ et une rotation de composantes covariantes Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12}. Si le cycle a la forme d'un parallélogramme partant d'un point M et dont les deux côtés ont pour projections sur les axes d'un des trièdres $\mathfrak{T}$ attachés au point M respectivement

$$
\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, \\ b_1, & b_2, & b_3, \end{matrix}
$$

on obtient les formes Π, Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} associées à ce parallélogramme en remplaçant respectivement les produits extérieurs

$$[\omega_2\omega_3], \quad [\omega_3\omega_1], \quad [\omega_1\omega_2]$$

par

$$a_2b_3 - b_2a_3, \quad a_3b_1 - b_3a_1, \quad a_1b_2 - b_1a_2.$$

II. — Le tenseur de courbure d'un espace de Weyl de la classe considérée.

3. Un *plan isotrope* est une variété à deux dimensions caractérisée par les propriétés suivantes :

a. En chacun de ses points l'élément plan tangent est isotrope;

b. Lorsqu'on se déplace d'un point à un autre de la variété, la différentielle covariante de tout vecteur situé dans l'élément plan tangent est contenue dans cet élément plan.

Cela posé, l'équation linéaire en $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ qui définit l'élément plan tangent est de la forme

$$(1-t^2)\omega_1 + i(1+t^2)\omega_2 + 2t\omega_3 = 0; \tag{3}$$

cet élément plan contient les deux vecteurs

$$\vec{e}_1 + i\vec{e}_2 + t\vec{e}_3 \qquad \text{et} \qquad t(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2) - \vec{e}_3.$$

Une seule et même équation exprime la condition b; elle s'écrit

$$dt + \frac{1}{2} i(1-t^2)\omega_{23} - \frac{1}{2}(1+t^2)\omega_{31} + it\omega_{12} = 0. \tag{4}$$

L'espace admettra ∞^2 plans isotropes, c'est-à-dire dépendant de 2 paramètres *complexes*, si le système formé des équations (3) et (4) est complètement intégrable, de manière que par tout point de l'espace et tangentiellement à tout élément plan isotrope mené par ce point il passe un plan isotrope. On vérifie d'abord que l'équation (3), différentiée extérieurement, est une conséquence de (3) et de (4). Quant à l'équation (4), sa différentiation extérieure donne, en tenant compte de (2),

$$\frac{1}{2} i(1-t^2)\Omega_{23} - \frac{1}{2}(1+t^2)\Omega_{31} + it\Omega_{12} = 0. \tag{5}$$

Le système sera complètement intégrable si l'équation (5) est une conséquence de (3), c'est-à-dire si la forme cubique extérieure

$$\left[\left\{(1-t^2)\omega_1 + i(1+t^2)\omega_2 + 2t\omega_3\right\}\left\{(1-t^2)\Omega_{23} + i(1+t^2)\Omega_{31} + 2t\Omega_{12}\right\}\right]$$

est identiquement nulle. Cela donne, en annulant les coefficients des différentes puissances de t, les cinq relations

$$\begin{cases} [\omega_1\Omega_{23}] = [\omega_2\Omega_{31}] = [\omega_3\Omega_{12}]. \\ [\omega_2\Omega_{12}] + [\omega_3\Omega_{31}] = 0. \\ [\omega_3\Omega_{23}] + [\omega_1\Omega_{12}] = 0. \\ [\omega_1\Omega_{31}] + [\omega_2\Omega_{23}] = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Elles expriment que dans le tableau des coefficients de $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$ dans Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12}, les éléments de la diagonale principale sont tous égaux entre eux et que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux et opposés. Nous poserons

$$\begin{cases} \Omega_{23} = \quad K[\omega_2\omega_3] - H_3[\omega_3\omega_1] + H_2[\omega_1\omega_2]. \\ \Omega_{31} = \quad H_3[\omega_2\omega_3] + K[\omega_3\omega_1] - H_1[\omega_1\omega_2]. \\ \Omega_{12} = -H_2[\omega_2\omega_3] + H_1[\omega_3\omega_1] + K[\omega_1\omega_2]. \end{cases} \tag{7}$$

Quant à la forme Π, elle résulte de l'application des relations

$$\begin{aligned} [\omega_1\Pi] - [\omega_2\Omega_{12}] + [\omega_3\Omega_{31}] &= 0, \\ [\omega_2\Pi] - [\omega_3\Omega_{23}] + [\omega_1\Omega_{12}] &= 0, \\ [\omega_3\Pi] - [\omega_1\Omega_{31}] + [\omega_2\Omega_{23}] &= 0, \end{aligned}$$

résultant elles-mêmes de la différentiation extérieure des trois premières équations (2). On en déduit facilement (6)

$$\Pi = 2H_1[\omega_2\omega_3] + 2H_2[\omega_3\omega_1] + 2H_3[\omega_1\omega_2]. \tag{8}$$

(6) Si l'espace de Weyl considéré est riemannien, les coefficients H_1, H_2, H_3 sont nuls et les équations (7) montrent qu'il est à courbure constante. On sait alors que par tout point et tangentiellement à tout élément plan issu de ce point il passe une surface totalement géodésique (plan); l'existence, dans un espace riemannien, de ∞^2 plans *isotropes* entraîne donc l'existence de ∞^3 plans.

4. Les identités de Bianchi proprement dites résultent de la différentiation extérieure des quatre dernières équations (2); on a

$$(9)\qquad \begin{cases} \Pi' = 0, \\ \Omega'_{23} + [\Omega_{12}\omega_{31}] - [\Omega_{31}\omega_{12}] = 0, \\ \Omega'_{31} + [\Omega_{23}\omega_{12}] - [\Omega_{12}\omega_{23}] = 0, \\ \Omega'_{12} + [\Omega_{31}\omega_{23}] - [\Omega_{23}\omega_{31}] = 0; \end{cases}$$

elles s'expriment très simplement sous la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} H_{11} + H_{22} + H_{33} = 0, \\ K_1 - H_{32} + H_{23} = 0, \\ K_2 - H_{13} + H_{31} = 0, \\ K_3 - H_{21} + H_{12} = 0. \end{cases}$$

Les quantités K_1, K_2, K_3 sont les trois premières dérivées covariantes de K; quant à la quantité H_{ij}, elle désigne la $j^{\text{ième}}$ dérivée covariante de H_i. On a du reste, comme cela résulte du calcul effectif des trois dernières relations (9),

$$(11)\qquad \begin{cases} DK = dK - 2K\varpi = K_1\omega_1 + K_2\omega_2 + K_3\omega_3, \\ DH_1 = dH_1 - 2H_1\varpi - H_2\omega_{12} + H_3\omega_{31} = H_{11}\omega_1 + H_{12}\omega_2 + H_{13}\omega_3, \\ DH_2 = dH_2 - 2H_2\varpi - H_3\omega_{23} + H_1\omega_{12} = H_{21}\omega_1 + H_{22}\omega_2 + H_{23}\omega_3, \\ DH_3 = dH_3 - 2H_3\varpi - H_1\omega_{31} + H_2\omega_{23} = H_{31}\omega_1 + H_{32}\omega_2 + H_{33}\omega_3. \end{cases}$$

Nous poserons

$$H_{23} - H_{32} = L_1.$$
$$H_{31} + H_{13} = L_2.$$
$$H_{12} - H_{21} = L_3.$$
$$H_{11} = M_1. \qquad H_{22} = M_2. \qquad H_{33} = M_3.$$

de sorte que les équations (11) s'écrivent, en tenant compte de (10),

$$(12)\qquad \begin{cases} DH_1 = dH_1 - 2H_1\varpi - H_2\omega_{12} + H_3\omega_{31} = M_1\omega_1 + \frac{1}{2}(L_3 - K_3)\omega_2 + \frac{1}{2}(L_2 - K_2)\omega_3, \\ DH_2 = dH_2 - 2H_2\varpi - H_3\omega_{23} + H_1\omega_{12} = \frac{1}{2}(L_3 + K_3)\omega_1 + M_2\omega_2 + \frac{1}{2}(L_1 - K_1)\omega_3, \\ DH_3 = dH_3 - 2H_3\varpi - H_1\omega_{31} + H_2\omega_{23} = \frac{1}{2}(L_2 - K_2)\omega_1 + \frac{1}{2}(L_1 - K_1)\omega_2 + M_3\omega_3. \end{cases}$$

avec, comme conséquence de la première équation (10),

$$(13)\qquad M_1 + M_2 + M_3 = 0.$$

Si nous différentions enfin extérieurement la première équation (11), nous obtenons

$$(14)\qquad \begin{cases} DK_1 = dK_1 - 3K_1\varpi - K_2\omega_{12} + K_3\omega_{31} = K_{11}\omega_1 + K_{12}\omega_2 + K_{13}\omega_3, \\ DK_2 = dK_2 - 3K_2\varpi - K_3\omega_{23} + K_1\omega_{12} = K_{21}\omega_1 + K_{22}\omega_2 + K_{23}\omega_3, \\ DK_3 = dK_3 - 3K_3\varpi - K_1\omega_{31} + K_2\omega_{23} = K_{31}\omega_1 + K_{32}\omega_2 + K_{33}\omega_3. \end{cases}$$

avec les relations

$$(15)\quad \begin{cases} K_{32} - K_{23} = 4KH_1, \\ K_{13} - K_{31} = 4KH_2, \\ K_{21} - K_{12} = 4KH_3. \end{cases}$$

Nous poserons

$$(16)\quad \begin{cases} K_{11} = P_1, & K_{22} = P_2, & K_{33} = P_3; \\ K_{23} = Q_1 - 2KH_1, & K_{31} = Q_2 - 2KH_2, & K_{12} = Q_3 - 2KH_3, \\ K_{32} = Q_1 + 2KH_1, & K_{13} = Q_2 + 2KH_2, & K_{21} = Q_3 + 2KH_3. \end{cases}$$

5. Les sept fonctions K, H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 dépendent des sept paramètres, tant principaux que secondaires, des trièdres introduits dans l'espace; ce sont des *fonctions de trièdre*. En général elles sont indépendantes (7). Plaçons-nous dans ce cas. Il en sera ainsi si le déterminant des coefficients de ω_1, ω_2, ω_3, ϖ, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} dans les expressions des différentielles (ordinaires) de ces sept fonctions, est différent de zéro, déterminant qu'il est inutile de former.

Les quantités nouvelles qui s'introduisent dans ce tableau, et qui ne sont autres que les dérivées premières covariantes de ces sept fonctions, sont, d'après (12) et (14),

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3;$$

ces quantités sont du reste liées par la relation (13); elles sont donc seulement au nombre de 11.

III. — Degré de généralité des espaces de Weyl de la classe considérée.

6. La première équation (11), les trois équations (12) et les trois équations (14) permettent de calculer les 7 formes ω_i, ϖ, ω_{ij} comme formes linéaires en dK, dH_i, dK_i, avec coefficients dépendant en outre des quantités M_i, L_i, P_i, Q_i. Il en résulte que si pour deux espaces de Weyl de la classe donnée, les quantités M_i, L_i, P_i, Q_i sont les *mêmes* fonctions des 7 quantités K, H_i, K_i, les deux espaces de Weyl sont géométriquement identiques, la correspondance trièdre à trièdre étant donnée par l'égalité chacune à chacune des quantités K, H_i, K_i, du premier espace aux quantités de même nom du second.

Il résulte de là en particulier que l'espace de Weyl le plus général de la classe considérée s'obtiendra en choisissant de la manière la plus générale possible les fonctions M_i, L_i, P_i, Q_i des 7 arguments K, H_i, K_i. *Ces fonctions doivent satisfaire à l'unique condition que les différentielles extérieures des formes* ω_i, ϖ, ω_{ij}, *supposées exprimées avec les sept variables* K, H_i, K_i, *satisfassent aux équations* (2), (7) *et* (8).

---

(7) Cette hypothèse exclut *en particulier* les espaces qui admettent un groupe continu de transformations en eux-mêmes.

Pour exprimer cette condition, il est beaucoup plus simple d'exprimer que les différentielles extérieures des sept équations qui donnent les formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, c'est-à-dire de la première équation (11), des équations (12) et des équations (14), sont vérifiées quand on y remplace les différentielles extérieures ω'_i, ϖ', ω'_{ij} par leurs valeurs tirées de (2), (7) et (8). Il est évident que ce second procédé donne un résultat équivalent au premier. *Nous sommes donc en mesure de former le système différentiel auquel doivent satisfaire les fonctions* M_i, L_i, K_{ij} *des sept arguments* K, H_i, K_i; nous n'aurons qu'à rechercher ensuite le degré de généralité de la solution générale de ce système (8). *Ce sera le degré de généralité* ESSENTIEL *des espaces de Weyl de la classe considérée* (9).

7. Cela posé, le système différentiel cherché sera formé des équations quadratiques extérieures qui se déduisent par différentiation extérieure des équations (12) et (14), où l'on suppose les K_{ij} remplacées par leurs valeurs (16), et où l'on remplacera les ω'_i, ϖ', ω'_{ij} par leurs valeurs tirées de (2), (7) et (8).

Le calcul donne pour le système cherché les 6 équations

$$
(17)\quad
\begin{cases}
[\omega_1 DM_1]+\frac{1}{2}[\omega_2 DL_3]+\frac{1}{2}[\omega_3 DL_2]+\left(4H_1^2-H_2^2-H_3^2-\frac{1}{2}P_2-\frac{1}{2}P_3\right)[\omega_2\omega_3] \\
\qquad +\left(5H_1H_2+\frac{1}{2}Q_3\right)[\omega_3\omega_1]+\left(5H_1H_3+\frac{1}{2}Q_2\right)[\omega_1\omega_2]=0, \\
\frac{1}{2}[\omega_1 DL_3]+[\omega_2 DM_2]+\frac{1}{2}[\omega_3 DL_1]+\left(5H_1H_2+\frac{1}{2}Q_3\right)[\omega_2\omega_3] \\
\qquad +\left(4H_3^2-H_3^2-H_1^2-\frac{1}{2}P_3-\frac{1}{2}P_1\right)[\omega_3\omega_1]+\left(5H_2H_3+\frac{1}{2}Q_1\right)[\omega_1\omega_2]=0, \\
\frac{1}{2}[\omega_1 DL_2]+\frac{1}{2}[\omega_2 DL_1]+[\omega_3 DM_3]+\left(5H_3H_1+\frac{1}{2}Q_2\right)[\omega_2\omega_3] \\
\qquad +\left(5H_2H_3+\frac{1}{2}Q_1\right)[\omega_3\omega_1]+\left(4H_3^2-H_1^2-H_2^2-\frac{1}{2}P_1-\frac{1}{2}P_2\right)[\omega_1\omega_2]=0;
\end{cases}
$$

$$
(18)\quad
\begin{cases}
[\omega_1 DP_1]+[\omega_2 DQ_3]+[\omega_3 DQ_2]+(6K_1H_1-3K_2H_2-3K_3H_3+2KM_1)[\omega_2\omega_3] \\
\qquad +(8K_1H_2+K_2H_1+KL_3)[\omega_3\omega_1]+(8K_1H_3+K_3H_1+KL_2)[\omega_1\omega_2]=0, \\
[\omega_1 DQ_3]+[\omega_2 DP_2]+[\omega_3 DQ_1]+(8K_2H_1+K_1H_2+KL_3)[\omega_2\omega_3] \\
\qquad +(6K_2H_2-3K_3H_3-3K_1H_1+2KM_2)[\omega_3\omega_1]+(8K_2H_3+K_3H_2+KL_1)[\omega_1\omega_2]=0, \\
[\omega_1 DQ_2]+[\omega_2 DQ_1]+[\omega_3 DP_3]+(8K_3H_1+K_1H_3+KL_2)[\omega_2\omega_3] \\
\qquad +(8K_3H_2+K_2H_3+KL_1)[\omega_1\omega_2]+(6K_3H_3-3K_1H_1-3K_2H_2+2KM_3)[\omega_1\omega_2]=0.
\end{cases}
$$

(8) Il importe de remarquer que si les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} tirées de la première équation (11) et des équations (12) et (14) satisfont aux relations (2), (7) et (8), les différentielles extérieures des ω'_i, ϖ', et ω'_{ij} sont identiquement nulles, car les relations (9) expriment précisément qu'il en est ainsi et les équations (12) et (14) sont des conséquences des équations (9). Cette remarque sera utilisée au n° 8.

(9) Il est essentiel parce qu'à deux solutions distinctes du système correspondent deux espaces de Weyl non géométriquement identiques, tandis que si l'on cherchait le degré de généralité des coefficients des formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, *quand on part d'un système de coordonnées arbitrairement donné*, il n'en serait plus de même.

On a posé, pour abréger,

$$(19)\quad \begin{cases} DM_1 = dM_1 - 3M_1\varpi - L_2\omega_{21} - L_3\omega_{12}, \\ DL_1 = dL_1 - 3L_1\varpi - L_2\omega_{12} - L_3\omega_{31} + 2(M_2 - M_3)\omega_{23}, \\ DP_1 = dP_1 - 4P_1\varpi + 2Q_2\omega_{21} - 2Q_3\omega_{12}, \\ DQ_1 = dQ_1 - 4Q_1\varpi + Q_2\omega_{12} - Q_3\omega_{31} + (P_2 - P_3)\omega_{23}, \end{cases}$$

relations auxquelles il faudrait ajouter celles qui s'en déduisent par permutations circulaires des indices 1, 2, 3, et qu'il est inutile d'écrire.

Il y aurait lieu ensuite de remplacer, au moins par la pensée, dans les équations (17) et (18), et dans les relations (19), les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} par leurs valeurs tirées de la première équation (11) et des équations (12) et (14). Les équations (17) et (18) constitueraient alors le système différentiel cherché aux fonctions inconnues L_i, M_i, P_i, Q_i des 7 variables indépendantes K, H_i, K_i.

8. Conformément à la théorie des systèmes en involution, telle qu'elle a été généralisée par E. Kähler ([10]), il y aurait lieu d'ajouter aux équations (16) et (18) du système ces équations différentiées extérieurement. Mais comme ces équations proviennent d'une première différentiation extérieure des équations (12) et (14), une seconde différentiation extérieure ne donnerait rien de nouveau attendu que, comme on l'a fait remarquer plus haut [note ([8])], la différentiation extérieure des formes ω_i', ϖ', ω_{ij}' donne zéro. Le système (17), (18) est un système *fermé* par rapport à l'opération de la différentiation extérieure.

Cela posé nous allons maintenan chercher l'expression la plus générale des éléments intégraux à 7 dimensions du système (17), (18). On les obtiendra en exprimant les différentielles des 11 fonctions inconnues M_i, L_i, P_i, Q_i comme combinaisons linéaires des différentielles des 7 variables indépendantes K, H_i, K_i, ou, ce qui revient au même, des 7 formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, et en écrivant que les expressions obtenues annulent identiquement les premiers membres des équations (17) et (18). Or on voit immédiatement que les formes DM_i, DL_i, DP_i, DQ_i, qui ne sont autres que les différentielles *absolues* ou *covariantes* des fonctions inconnues, ne dépendent linéairement que de ω_1, ω_2, ω_3. La multiplication extérieure par $[\omega_2\omega_3]$ de la première équation (17), par exemple, donne

$$[\omega_1\omega_2\omega_3 DM_1] = 0,$$

ce qui exprime la propriété de DM_1 de ne dépendre que de ω_1, ω_2, ω_3. Nous poserons

$$\begin{aligned} DM_i &= M_{i1}\omega_1 + M_{i2}\omega_2 + M_{i3}\omega_3, \\ DL_i &= L_{i1}\omega_1 + L_{i2}\omega_2 + L_{i3}\omega_3, \\ DP_i &= P_{i1}\omega_1 + P_{i2}\omega_2 + P_{i3}\omega_3, \\ DQ_i &= Q_{i1}\omega_1 + Q_{i2}\omega_2 + Q_{i3}\omega_3. \end{aligned}$$

([10]) E. Kähler, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (*Hamburger Math. Einzelschriften*, 16, 1934).

En exprimant que les coefficients de $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$ dans les premiers membres des équations (17) et (18) sont nuls, on trouve 18 équations donnant respectivement, au moyen des M_i, L_{ij}, P_i, Q_i, K, K_i, H_i, les quantités

$$\frac{1}{2}(L_{33}-L_{22}),\quad \frac{1}{2}L_{21}-M_{13},\quad M_{12}-\frac{1}{2}L_{31};$$

$$M_{23}-\frac{1}{2}L_{12},\quad \frac{1}{2}(L_{11}-L_{33}),\quad \frac{1}{2}L_{32}-M_{21},$$

$$\frac{1}{2}L_{13}-M_{32},\quad M_{31}-\frac{1}{2}L_{23},\quad \frac{1}{2}(L_{22}-L_{11});$$

$$Q_{33}-Q_{22},\quad Q_{21}-P_{12},\quad P_{12}-Q_{21};$$
$$P_{23}-Q_{12},\quad Q_{11}-Q_{33},\quad Q_{32}-P_{21};$$
$$Q_{13}-P_{32},\quad P_{31}-Q_{23},\quad Q_{22}-Q_{11}.$$

Ces 18 expressions se réduisent à 16 indépendantes. La somme des coefficients de $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$, pris respectivement dans la première, la seconde et la troisième équation (17), donne la relation

$$P_1+P_2+P_3=3(H_1^2+H_2^2+H_3^2); \tag{20}$$

l'opération analogue, effectuée sur l'équation (18), donne la relation (13).

Il ne reste donc en réalité que 10 fonctions inconnues, par exemple

$$M_1,\quad M_2;\quad L_1,\quad L_2,\quad L_3;\quad P_1,\quad P_2;\quad Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3; \tag{21}$$

on remplacera partout, dans les équations du système, M_3 par sa valeur tirée de (13) et P_3 par sa valeur tirée de (20).

Les 10 fonctions inconnues (21) admettent $10\times 3=30$ dérivées covariantes liées par 16 relations indépendantes, respectivement résolubles par rapport à

$$L_{11}-L_{33},\quad L_{22}-L_{33},\quad L_{12},\quad L_{23},\quad L_{31},\quad L_{21},\quad L_{32},\quad L_{13};$$
$$Q_{11}-Q_{33},\quad Q_{22}-Q_{33},\quad Q_{12},\quad Q_{23},\quad Q_{31},\quad Q_{21},\quad Q_{32},\quad Q_{13}.$$

On en conclut que l'*élément intégral à 7 dimensions le plus général dépend de* $30-16=14$ *paramètres arbitraires*.

9. Appliquons maintenant les principes de la théorie des systèmes en involution (11). Rangeons les formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, combinaisons linéaires indépendantes des différentielles $d\mathrm{K}$, $d\mathrm{H}_i$, $d\mathrm{K}_i$, dans l'ordre

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \varpi,\quad \omega_{23},\quad \omega_{31},\quad \omega_{12}. \tag{22}$$

Considérons un élément intégral linéaire E_1 annulant les 6 dernières formes de la suite (22) sans annuler la première, et formons les équations de l'*élément polaire* de E_1 (système polaire de E_1), qui expriment que l'élément linéaire

(11) *Voir* en particulier, en dehors de l'ouvrage de E. Kähler (10), E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Chap. I (*Ann. Éc. Norm.*, 21, 1904, pp. 153-175).

$(\omega_i, \varpi, \omega_{ij}, d\mathrm{L}_i, d\mathrm{M}_i, d\mathrm{P}_i, d\mathrm{Q}_i)$ forme avec E_1 un élément intégral à 2 dimensions. Ces équations, abstraction faite des termes en ω_i, ϖ, ω_{ij} (équations réduites) sont au nombre de 6, à savoir

$$d\mathrm{M}_1 = 0, \quad d\mathrm{L}_2 = 0, \quad d\mathrm{L}_2 = 0, \quad d\mathrm{P}_1 = 0, \quad d\mathrm{Q}_2 = 0, \quad d\mathrm{Q}_2 = 0;$$

nous désignons par σ_1 ce premier nombre.

Considérons maintenant un élément intégral à 2 dimensions E_2 contenant l'élément E_1, annulant les 5 dernières formes de la suite (22), mais sans établir de relation linéaire entre ω_1, ω_2; son système polaire réduit contiendra, outre les 6 équations précédentes du système polaire réduit de E_1, 4 équations (qui abstraction faite des termes en ω_i, ϖ, ω_{ij}) sont

$$d\mathrm{M}_2 = 0, \quad d\mathrm{L}_1 = 0, \quad d\mathrm{P}_2 = 0, \quad d\mathrm{Q}_1 = 0;$$

nous désignerons par σ_2 le nombre 4 des équations nouvelles obtenues.

On peut continuer en considérant le système polaire réduit d'un élément intégral E_3 annulant les 4 dernières formes de la suite (22), sans établir de relation entre ω_1, ω_2, ω_3. Son système polaire réduit ne contiendra aucune équation nouvelle, et ainsi de suite. Nous poserons donc

$$\sigma_1 = 6, \quad \sigma_2 = 4; \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = \sigma_7 = 0.$$

D'après la théorie des systèmes en involution, il *suffit*, pour que le système différentiel soit en involution, que le nombre des paramètres arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général à 7 dimensions soit égal à

$$\sigma_1 - 2\sigma_2 + 3\sigma_3 - 4\sigma_4 - 5\sigma_5 + 6\sigma_6 - 7\sigma_7 = 6 + 2.4 = 14;$$

or c'est précisément ce que nous avons constaté; le système est donc en involution. De plus comme σ_2 est le dernier nombre σ_i qui ne soit pas nul et que sa valeur est 2, la solution générale du système dépend de $\sigma_2 = 4$ fonctions arbitraires de *deux* arguments. Les entiers σ_i sont les *caractères* du système.

Théorème. — *Les espaces de Weyl à trois dimensions qui admettent ∞^2 plans isotropes dépendent essentiellement de quatre fonctions arbitraires de deux arguments.*

IV. — Variétés régulières et variétés caractéristiques.

10. Si nous avions rangé dans un autre ordre les 7 formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, nous aurions trouvé en général des entiers σ_i différents et le critère *suffisant* d'involution n'aurait pas pu être utilisé. D'une manière générale considérons un élément intégral à p dimensions, entraînant $7 - p$ relations linéaires entre les formes ω_i, ϖ, ω_{ij}; cet élément sera dit régulier si le rang de son système polaire est égal à $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p$, où les σ_i sont les caractères obtenus au numéro

précédent : c'est le cas général. Il sera dit *singulier* dans le cas contraire, le rang étant alors *inférieur* à $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p$.

Comme dans aucun terme des premiers membres des équations (17) et (18) les différentielles $d\mathrm{M}_i$, $d\mathrm{L}_i$, $d\mathrm{P}_i$, $d\mathrm{Q}_i$ ne figurent multipliées par ϖ, ω_{23}, ω_{31} ou ω_{12}, nous voyons que le rang du système polaire d'un élément intégral annulant ω_1, ω_2, ω_3 est toujours nul. On en déduit qu'*un élément intégral régulier ne peut jamais annuler les trois formes* ω_1, ω_2, ω_3, et cela quelle que soit la dimension de cet élément.

Un élément intégral à une dimension pour lequel les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} sont proportionnelles à des nombres donnés a_i, a, a_{ij} ne peut donc être régulier que si a_1, a_2, a_3 ne sont pas nuls tous les trois. Cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que les équations réduites de son élément polaire, à savoir

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{llll} 2a_1\,d\mathrm{M}_1+ & a_2\,d\mathrm{L}_3+ & a_3\,d\mathrm{L}_2 & =0,\\ a_1\,d\mathrm{L}_3+ & 2a_2\,d\mathrm{M}_2+ & a_3\,d\mathrm{L}_1 & =0.\\ a_1\,d\mathrm{L}_2+ & a_2\,d\mathrm{L}_1- & 2a_3(d\mathrm{M}_1+d\mathrm{M}_2) & =0,\\ a_1\,d\mathrm{P}_1+ & a_2\,d\mathrm{Q}_3+ & a_3\,d\mathrm{Q}_2 & =0.\\ a_1\,d\mathrm{Q}_3+ & a_2\,d\mathrm{P}_2+ & a_3\,d\mathrm{Q}_1 & =0,\\ a_1\,d\mathrm{Q}_2+ & a_2\,d\mathrm{Q}_1- & a_3(d\mathrm{P}_1+d\mathrm{P}_2) & =0, \end{array}\right.$$

soient de rang $\sigma_1=6$.

Un élément intégral qui n'entraîne aucune relation linéaire entre ω_1, ω_2, ω_3, quelle que soit sa dimension supérieure ou égale à 3, est toujours régulier, car il est évident que le rang de son système polaire est 10.

Considérons enfin un élément intégral entraînant une relation linéaire et une seule entre ω_1, ω_2, ω_3, soit $c_1\omega_1+c_2\omega_2+c_3\omega_3=0$. Il contiendra au moins deux éléments linéaires distincts, l'un pour lequel les ω_i sont proportionnels à des constantes a_i, l'autre pour lequel les ω_i sont proportionnels à des constantes b_i, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{a_2b_3-b_2a_3}{c_1}=\frac{a_3b_1-b_3a_1}{c_2}=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{c_3}.$$

Le système polaire de l'élément sera formé par les équations (23) et 6 équations analogues où les a_i sont remplacés par les b_i. On démontre facilement que ces 12 équations entraînent

$$\frac{2\,d\mathrm{M}_1}{c_1^2}=\frac{2\,d\mathrm{M}_2}{c_2^2}=\frac{-2(d\mathrm{M}_1+d\mathrm{M}_2)}{c_3^2}=\frac{d\mathrm{L}_1}{c_2c_3}=\frac{d\mathrm{L}_2}{c_3c_1}=\frac{d\mathrm{L}_3}{c_1c_2};$$

$$\frac{d\mathrm{P}_1}{c_1^2}=\frac{d\mathrm{P}_2}{c_2^2}=\frac{-(d\mathrm{P}_1+d\mathrm{P}_2)}{c_3^2}=\frac{d\mathrm{Q}_1}{c_2c_3}=\frac{d\mathrm{Q}_2}{c_3c_1}+\frac{d\mathrm{Q}_3}{c_1c_2}.$$

Il en résulte l'annulation des $d\mathrm{M}_i$, $d\mathrm{L}_i$, $d\mathrm{P}_i$, $d\mathrm{Q}_i$ si l'on n'a pas $c_1^2+c_2^2+c_3^2=0$; dans ce cas général le rang du système polaire est 10 et l'élément intégral est régulier. Il y a exception si l'on a $c_1^2+c_2^2+c_3^2=0$, car alors le rang du système

polaire se réduit à 8. Dans ce dernier cas l'élément intégral considéré, envisagé du point de vue ponctuel dans l'espace de Weyl, est isotrope.

11. Étant donné un espace de Weyl $\mathcal{E}$ de la classe envisagée dans ce Mémoire, considérons l'espace des ∞^7 trièdres trirectangles attachés aux différents points de $\mathcal{E}$. Dans cet espace à 7 dimensions, une variété à $p < 7$ dimensions sera dite *régulière* si ses éléments tangents à p dimensions sont réguliers. D'après les résultats du numéro précédent les variétés régulières sont :

1° Les variétés à une dimension obtenue en prenant dans l'espace $\mathcal{E}$ une courbe analytique quelconque (C) et en attachant à chaque point de (C) un trièdre trirectangle suivant une loi analytique déterminée;

2° Les variétés à $p \geq 2$ dimensions obtenues en prenant dans l'espace $\mathcal{E}$ une surface analytique (S) dont les plans tangents ne sont pas isotropes et en attachant à chaque point de S un trièdre trirectangle ou une famille de trièdres trirectangles suivant une loi analytique déterminée;

3° Les variétés à $p \geq 3$ dimensions obtenues en prenant tous les points de l'espace $\mathcal{E}$ et en attachant à chacun d'eux un trièdre trirectangle ou une famille de trièdres trirectangles suivant une loi déterminée.

Une variété non régulière sera dite caractéristique.

Nous pouvons dire, en nous plaçant au seul point de vue ponctuel, que *dans l'espace de Weyl toutes les courbes et toutes les surfaces à plans tangents non isotropes sont des variétés régulières; les surfaces à plans tangents isotropes sont les seules variétés caractéristiques* ([12]).

V. — Le problème de Cauchy. Un théorème d'existence et d'unicité.

12. D'après la théorie des systèmes en involution, le fait que le dernier caractère non nul du système différentiel (17), (18) est σ_2 entraîne comme conséquence que *par toute variété intégrale régulière à deux dimensions de ce système il passe une variété intégrale à 7 dimensions et une seule.* Il en résulte que la connaissance d'une surface (S) à plans tangents non isotropes tracée dans un espace de Weyl de la classe que nous étudions entraîne la détermination de tout l'espace. Mais cela demande à être précisé.

Rappelons auparavant que toute surface plongée dans un espace de Weyl à trois dimensions possède trois formes fondamentales :

1° Une forme différentielle quadratique F qui représente le ds^2 de la surface quand on a fait choix en chacun de ses points d'une certaine unité de longueur;

([12]) Comme nous nous plaçons en principe dans le domaine réel, si la forme fondamentale de l'espace est définie, il n'existe en fait aucune variété caractéristique.

2° Une seconde forme différentielle quadratique Φ (seconde forme fondamentale) égale au produit scalaire $-d\vec{e}_3 . d\vec{M}$, où $\vec{e}_3$ désigne en chaque point de (S) le vecteur normal à (S) et dont la longueur est l'unité de longueur attachée à ce point;

3° Une forme différentielle linéaire Ψ égale à la variation élémentaire relative de l'unité de longueur quand on passe d'un point à un point infiniment voisin.

Ces trois formes différentielles ne sont pas définies sans ambiguïté; si l'on change les unités de longueur, le rapport de la nouvelle unité de longueur à l'ancienne en chaque point étant une fonction de point λ, la forme F est multipliée par $\frac{1}{\lambda^2}$, la forme Φ par $\frac{1}{\lambda}$, et la forme Ψ s'augmente de la différentielle logarithmique $\frac{d\lambda}{\lambda}$.

Cela posé nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant données trois formes différentielles à deux variables u, v, les deux premières* F *et* Φ *quadratiques, la troisième* Ψ *linéaire, il existe un espace de Weyl et un seul appartenant à la classe des espaces de Weyl à ∞^2 plans isotropes, tel qu'on puisse plonger dans cet espace une surface admettant les trois formes fondamentales* F, Φ, Ψ.

13. Avant de démontrer le théorème qui présente sous une forme géométrique intuitive le problème de Cauchy relatif à la détermination des espaces de Weyl de la classe que nous étudions, faisons quelques remarques. D'abord la forme F, étant analytique, peut toujours, par un choix convenable des coordonnées curvilignes sur la surface, être mise sous la forme d'un multiple de $du^2 + dv^2$, et comme F peut, par un choix convenable des unités de longueur aux différents points de l'espace, être divisée par un facteur positif arbitraire, nous pourrons supposer

$$\mathrm{F} = du^2 + dv^2. \tag{24}$$

Nous poserons alors

$$\begin{cases} \Phi = \mathrm{A}\,du^2 + 2\,\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2, \\ \Psi = p\,du + q\,dv, \end{cases} \tag{25}$$

A, B, C, p, q étant cinq fonctions analytiques de u, v.

La forme de F montre que si la surface (S) appartient à un espace de Weyl de la classe considérée, on pourra attacher à chaque point de (S) un trièdre trirectangle et un seul de telle manière qu'on ait

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dv, \qquad \omega_3 = 0. \tag{26}$$

On aura ensuite

$$\varpi = p\,du + q\,dv. \tag{27}$$

La forme Φ de son côté va nous permettre de calculer ω_{13} et ω_{23}. En effet l'équation $\omega_3 = 0$ entraîne, d'après (2),

$$[du\,\omega_{13}] + [dv\,\omega_{23}] = 0,$$

et, d'autre part, on a

$$\Phi = -\,\mathrm{D}\vec{e}_3\,\vec{\mathrm{DM}} = du\,\omega_{13} + dv\,\omega_{23}.$$

d'où résulte immédiatement

$$\omega_{13} = \mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv, \qquad \omega_{23} = \mathrm{B}\,du + \mathrm{C}\,dv. \tag{28}$$

Reste enfin à calculer ω_{12}. Les deux premières équations (2) nous donnent

$$\begin{aligned} q[du\,dv] - [dv\,\omega_{12}] &= 0, \\ -\,p[du\,dv] + [du\,\omega_{12}] &= 0. \end{aligned}$$

d'où

$$\omega_{12} = -\,q\,du + p\,dv. \tag{29}$$

Les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} sont donc connues en tout point de (S) et quand on se déplace le long de (S). Nous allons voir que les quantités K, H_i, K_i, M_i, L_i, P_i, Q_i sont également déterminées sur la surface (S).

14. Les relations (2), (7) et (8) nous donnent facilement

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{K} &= -(p_u + q_v) + \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}, \\ \mathrm{H}_1 &= \mathrm{A}_v - \mathrm{B}_u - p\mathrm{B} - q\mathrm{C}, \\ \mathrm{H}_2 &= \mathrm{B}_v - \mathrm{C}_u + p\mathrm{A} + q\mathrm{B}, \\ \mathrm{H}_3 &= \frac{1}{2}(p_v - q_u). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

La première équation (11) et les équations (12) donnent ensuite

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{K}_1 &= \mathrm{K}_u - 2p\mathrm{K}, \\ \mathrm{K}_2 &= \mathrm{K}_v - 2q\mathrm{K}, \\ \mathrm{K}_3 &= (\mathrm{H}_2)_u - (\mathrm{H}_1)_v - p\mathrm{H}_2 + q\mathrm{H}_1, \\ \mathrm{L}_1 &= 2(\mathrm{H}_3)_v - \mathrm{K}_u + 2p\mathrm{K} + 2\mathrm{BH}_1 + 2\mathrm{CH}_2 - 4q\mathrm{H}_3, \\ \mathrm{L}_2 &= 2(\mathrm{H}_3)_u + \mathrm{K}_v - 2q\mathrm{K} + 2\mathrm{AH}_1 + 2\mathrm{BH}_2 - 4p\mathrm{H}_3, \\ \mathrm{L}_3 &= (\mathrm{H}_2)_u + (\mathrm{H}_1)_v - 3p\mathrm{H}_2 - 3q\mathrm{H}_1 - 2\mathrm{BH}_3, \\ \mathrm{M}_1 &= (\mathrm{H}_1)_u - 2p\mathrm{H}_1 + q\mathrm{H}_2 - \mathrm{AH}_3, \\ \mathrm{M}_2 &= (\mathrm{H}_2)_v - 2q\mathrm{H}_2 + p\mathrm{H}_1 - \mathrm{CH}_3. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Enfin les équations (14) donnent

$$(3a)\qquad \begin{cases} P_1 = (K_1)_u - 3pK_1 + qK_2 - AK_3, \\ P_2 = (K_2)_v - 3qK_2 + pK_1 - CK_3, \\ Q_1 = (K_2)_v - 3qK_2 + BK_1 + CK_2 - 2KH_1, \\ Q_2 = (K_3)_u - 3pK_3 + AK_1 + BK_2 + 2KH_2, \\ Q_3 = \frac{1}{2}(K_1)_v + \frac{1}{2}(K_2)_u - 2qK_1 - 2pK_2 - BK_3. \end{cases}$$

On a donc effectivement obtenu les valeurs sur la surface (S) des 17 fonctions

$$K;\ H_1,\ H_2,\ H_3;\ K_1,\ K_2,\ K_3;$$
$$M_1,\ M_2;\ L_1,\ L_2,\ L_3;\ P_1,\ P_2;\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3.$$

Les quatre premières font intervenir les fonctions A, B, C, p, q, et leurs dérivées partielles du premier ordre, les huit suivantes font en outre intervenir leurs dérivées du second ordre et les cinq dernières leurs dérivées du troisième ordre.

Les équations (12), (14) étant vérifiées quand on y fait $\omega_3 = 0$, les différentielles extérieures de ces équations seront encore vérifiées dans les mêmes conditions. Autrement dit les relations qui existent entre les 17 fonctions K, H_i, K_i, M_i, L_i, P_i, Q_i constituent une solution à deux dimensions *régulière* du système différentiel (17), (18), et par suite il existe bien un espace de Weyl de la classe étudiée, contenant une surface dont les formes fondamentales sont les formes données F, Φ, Ψ.

Il y a cependant une restriction. Nous avons supposé que dans l'espace de Weyl les 7 fonctions K, H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 étaient indépendantes, autrement dit que le déterminant Δ des coefficients des ω_i, ϖ, ω_{ij} dans leurs 7 différentielles était différent de zéro. Il est donc nécessaire de supposer que ce déterminant, construit d'une manière connue avec les fonctions A, B, C, p, q de u et de v et leurs dérivées partielles des trois premiers ordres, est différent de zéro. Ce n'est qu'à cette condition que l'on pourra tirer sans ambiguïté de la première relation (13) et des 6 relations (12) et (14) les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} exprimées en fonction linéaire des dK, dH_i, dK_i. Nous sommes sûrs d'avance, il est vrai, que ces équations sont vérifiées pour les valeurs (24), (27), (28) et (29) de ces formes, mais il ne faut pas qu'il y ait d'autres solutions.

Le théorème énoncé au n° 12 est donc démontré, sous la réserve qu'un certain déterminant construit avec les coefficients A, B, C, p, q *des formes fondamentales données et leurs dérivées partielles des trois premiers ordres ne soit pas nul.*

15. Les formes différentielles données F, Φ, Ψ introduisent *cinq* fonctions analytiques arbitraires de deux variables u, v, à savoir A, B, C, p, q. Il semble donc à première vue que les espaces de Weyl de la classe étudiée dépendent de cinq fonctions arbitraires de deux arguments. Mais il ne faut pas oublier que

chacun de ces espaces peut être déterminé par une infinité de surfaces distinctes, infinité dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables, de sorte qu'il est vraisemblable que les espaces dépendent essentiellement de quatre fonctions arbitraires seulement, conformément aux résultats trouvés *a priori* au n° 9. On peut du reste choisir les formes fondamentales F et Φ de manière à correspondre à une *surface minima* par exemple. Dans tout espace de Weyl il existe en effet une infinité de surfaces minima, c'est-à-dire dont les courbures principales en chaque point (définies chacune à un facteur près suivant l'unité de longueur choisie en ce point) sont égales et opposées; ces surfaces, comme dans l'espace ordinaire, dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. Elles correspondent, avec le choix fait plus haut des formes fondamentales, à $C = -A$; les données correspondantes ne dépendent plus que de quatre fonctions arbitraires de deux variables. Le même espace est encore obtenu, il est vrai, une infinité de fois, mais cette infinité ne dépend que de fonctions arbitraires d'un seul argument.

16. Il ne sera pas mauvais de préciser enfin le caractère d'*unicité* de la solution de Cauchy qui fait l'objet du théorème du n° 12. La donnée des trois formes fondamentales F, Φ, Ψ, d'après ce théorème, détermine un espace de Weyl de la classe étudiée et un seul. Cela veut dire que si l'on considère deux espaces de Weyl dans chacun desquels on peut trouver une surface admettant les trois formes fondamentales données, les mêmes relations existent, dans ces deux espaces, entre les variables indépendantes K, H_i, K_i et les fonctions inconnues M_i, L_i, P_i, Q_i. Autrement dit on peut établir entre les trièdres trirectangles attachés aux deux espaces une correspondance biunivoque entraînant l'égalité chacune à chacune des formes ω_i, ϖ, ω_{ij} des deux espaces, qui ont ainsi les mêmes propriétés géométriques, ou, comme on dit, sont applicables l'un sur l'autre. Remarquons que ce caractère d'unicité est lié à la propriété du système différentiel (17), (18) que son dernier caractère différent de zéro soit σ_2 et non σ_3. Cette particularité ne se présenterait plus si l'on cherchait par exemple les espaces riemanniens susceptibles de contenir une surface dont les deux formes fondamentales soient données à l'avance, car les espaces riemanniens les plus généraux à trois dimensions dépendent de trois fonctions arbitraires de trois arguments ($\sigma_3 = 3$).

SUR LES

COURBES DE RIBAUCOUR

ET SUR LES

RÉSEAUX CONJUGUÉS GÉODÉSIO-CONIQUES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

1. *Introduction.* — Dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure* (1), j'ai été amené à signaler l'existence, et à indiquer quelques propriétés, des surfaces (A) enveloppes de sphères à un paramètre jouissant de la propriété suivante : si M et N sont deux centres de courbure principaux associés quelconques de (A), le lieu géométrique des points I partageant le segment MN (*segment principal*) dans un rapport constant donné $K\left[\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = K\right]$ est un plan π [*plan de base* de (A)].

Si $K = -1$, les surfaces (A) sont les surfaces enveloppes de sphères à *développée moyenne plane;* c'est de ces dernières surfaces qu'il a surtout été question dans le Mémoire cité; on a vu qu'elles sont étroitement liées aux surfaces minima d'O. Bonnet à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, et que leur détermination analytique peut être effectuée complètement.

Nous nous proposons, dans cet article, d'examiner en détail le cas général. Nous serons ainsi conduits à distinguer deux classes de surfaces (A), suivant que le rayon R de la sphère S qui enveloppe (A) est constant ou variable, ce dernier cas (R variable) donnant lieu, à son tour, à la considération de trois types géométriquement séparés. Dans l'un et l'autre cas nous verrons intervenir, de deux façons différentes, la famille complète des courbes de Ribaucour du plan. Dans le premier cas, ces courbes interviennent comme *déférentes* [lieux des centres des sphères des surfaces (A)]. Dans le second cas (qui est le cas vraiment général) les courbes de Ribaucour interviennent dans la définition

(1) Sur une famille de surfaces à lignes de courbure plane, (3), t. LIX, 1942.

des deux premiers (*voir* les nos 5 et 6) des trois types distincts auxquels il a été fait allusion plus haut; la relation entre les courbes de Ribaucour et les surfaces des deux types en question est beaucoup plus cachée que dans le premier cas, et peut être regardée comme fournissant une nouvelle définition des courbes de Ribaucour, nettement différente de la définition usuelle.

Les courbes de Ribaucour n'interviennent plus dans la construction des surfaces (A) du troisième type; mais celui-ci donne lieu à la remarque suivante. En général, une courbe déterminée ne peut être la déférente que d'une seule surface (A) [en ne considérant pas comme distinctes deux surfaces (A) parallèles]. Il existe cependant des courbes spéciales pouvant servir de déférentes à deux surfaces (A) distinctes, c'est-à-dire définies par deux lois distinctes de variation des rayons R et R′ avec la position du centre de la sphère génératrice [non liées par la relation $R' - R = h(\text{const.})$]. Les surfaces (A) pouvant s'assembler par couples de même déférente sont précisément celles du troisième type signalé; elles sont susceptibles d'une définition géométrique remarquablement simple, et d'une détermination analytique explicite complète.

Les nappes Σ non curvilignes, des développées des surfaces (A), jouissent de la propriété de posséder un réseau conjugué (que nous dirons *géodésio-conique*) formé d'une famille de ∞^1 géodésiques et d'une famille de ∞^1 coniques. Les coniques du réseau sont deux à deux homothétiques, mais les surfaces Σ ci-dessus ne donnent pas tous les réseaux géodésio-coniques dont les coniques sont deux à deux homothétiques. Nous effectuons la détermination complète de ces derniers réseaux, ainsi que celle des réseaux de même dénomination, pour lesquels les plans des coniques sont parallèles à une droite fixe, ou passent par une droite fixe ou par un point fixe. Dans tous les cas étudiés la solution peut être présentée sous des formes géométriques qu'il nous a paru intéressant de mettre en évidence.

2. *Les surfaces* (A) *et les éléments associés.* — Nous effectuerons la détermination des surfaces (A) en recherchant, pour l'une quelconque de ces surfaces, la forme de la déférente C [lieu des centres des sphères S inscrites dans (A) et première nappe de la développée de (A)], et la loi de variation du rayon de la sphère S lorsque son centre décrit C. Prenons pour plan de base de (A) le plan xOy du système rectangulaire $Oxyz$, et désignons par $M(x, y, z)$ le point courant sur C; M est le premier centre de courbure principal de (A), auquel sont associés ∞^1 deuxièmes centres de courbure principaux (N) situés sur les ∞^1 normales à (A) issues de M, normales dont l'ensemble constitue un cône de révolution Ω (éventuellement un plan), ayant pour base le cercle caractéristique de S, et circonscrit à la deuxième nappe Σ de la développée de (A). Il est clair que Σ est une véritable surface et non une courbe, car les seules surfaces dont les deux nappes de la développée sont curvilignes sont les cyclides de Dupin, et qu'aucune de ces cyclides (si l'on écarte le cas banal où le rapport K

est nul ou infini) ne saurait avoir ses segments principaux partagés dans un rapport constant par un plan fixe. Écarter les cas $K=0$ et $K=\infty$ revient d'ailleurs, notons-le, à ne pas considérer comme de véritables surfaces (A) les surfaces à déférente plane et à loi de variation des rayons arbitraire.

Sur Σ, les ∞^1 centres de courbure N associés à un même point M de C sont distribués sur une conique, courbe de contact du cône de révolution Ω avec Σ, et section de Σ par le plan parallèle à xOy de cote $\frac{z}{K}$ (z étant la cote de M). En exprimant, conformément à la définition des surfaces (A), que C, et la loi de variation du rayon de S, sont tels que la cote du plan précédent est constamment égale à $\frac{z}{K}$, on a un moyen de déterminer, simultanément, la déférente C et la loi de variation du rayon correspondante.

3. *Surfaces-canaux du type* (A). — Il sera commode de prendre comme paramètre, pour fixer un point quelconque M de C et la sphère S centrée en ce point, le rayon R de S. Cela ne sera possible que si R n'est pas constant le long de C. Cherchons donc, pour commencer, les surfaces (A) enveloppes d'une sphère de rayon constant (surfaces-canaux). Le cône Ω du n° 2 ayant pour sommet un point quelconque M de la déférente C est ici un plan : le plan normal P à C en M. La surface Σ enveloppe du cône Ω se réduit à la développable polaire de C, et la conique caractéristique de Σ à la droite polaire p relative au point M. La droite p restant constamment parallèle au plan de base de la surface (A), la développable polaire de C (enveloppe de p) se réduit à un plan parallèle au plan de base, ou à un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan de base. Le cas de la surface polaire plane ne pouvant évidemment se présenter, cette surface est un cylindre, et la courbe C est nécessairement une courbe plane située dans un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Envisageons dès lors dans le plan de C : la courbe C, la section ε de sa développable polaire (développée de C), le point N de ε qui correspond à un point quelconque M de C, et la trace (fixe) δ du plan de base de (A) qui coupe MN en I. Par définition de (A) le rapport $\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}}$ est constant lorsque M décrit C; il en résulte que C jouit de la propriété que les centres de courbure partagent les segments de normale limités à la courbe et à une droite fixe (δ) dans un rapport constant : c'est une *courbe de Ribaucour* de base δ, et il est clair que l'on obtient toutes les surfaces-canaux du type (A) en centrant des sphères de même rayon sur une courbe de Ribaucour arbitraire. Les surfaces obtenues sont celles de la première classe signalée dans l'Introduction; nous allons poursuivre en supposant R variable.

4. *Surfaces* (A) *enveloppes de sphères de rayon variable.* — On peut, dans les conditions où l'on se place, prendre comme paramètre, pour fixer la position

de la sphère S centrée en un point quelconque de la déférente C de l'une quelconque des surfaces cherchées (A) [de plan de base xOy], le rayon R de S. Le cercle de base (caractéristique de S) du cône de révolution Ω défini au n° 2 est donné par les deux équations

$$(1) \qquad \sum (X-x)^2 = R^2, \qquad \sum (X-x)\frac{dx}{dR} + R = 0,$$

où x, y, z sont les coordonnées du centre M de la sphère S; X, Y, Z les coordonnées courantes, et où les sommes Σ sont étendues aux trois ensembles de lettres (x, y, z), (X, Y, Z). Le cône Ω a pour équation

$$(2) \qquad \sum (X-x)^2 = \left[\sum (X-x)\frac{dx}{dR}\right]^2;$$

et son enveloppe, qui s'obtient par dérivation de (2) par rapport à R et élimination de R entre l'équation obtenue et (2), comprend, outre la courbe C lieu du sommet, la deuxième nappe Σ de la développée de (A).

Cette deuxième nappe est, comme il est facile de le voir, le lieu de la conique (le long de laquelle Ω touche Σ) section du cône (2) par le plan

$$(3) \qquad \sum (X-x)\frac{d^2x}{dR^2} - \sum \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + 1 = 0.$$

Conformément à ce qui a été dit au n° 2, pour obtenir les surfaces (A) cherchées, il suffit d'exprimer que le plan (3) est parallèle au plan de base xOy, et que sa cote est constamment égale à $\frac{z}{K}$ (z étant la cote, sur C, du sommet M du cône Ω). La première des deux conditions précédentes fournit les deux relations

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{dR^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dR^2} = 0,$$

et la deuxième $\left[\text{cote du plan (3) égale à } \frac{z}{K}\right]$ donne l'équation différentielle

$$(5) \qquad \frac{K-1}{K} z \frac{d^2z}{dR^2} + \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dR}\right)^2 - 1 = 0.$$

Les équations (4) montrent que la déférente C est une courbe *plane*, située dans un plan perpendiculaire au plan de base xOy. En prenant le plan de C confondu avec xOz, et en négligeant (ce qui est évidemment permis) une translation parallèle à Ox, on aura

$$(6) \qquad x = aR, \qquad y = 0 \qquad (a = \text{const.}),$$

et la substitution $R \to \frac{x}{a}$ dans (5) donnera l'équation différentielle définissant, dans le plan xOz, les déférentes C des surfaces cherchées

$$(7) \qquad 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{K-1}{K} z \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{a^2}.$$

L'intégration de (7) donne l'équation générale des courbes C sous la forme

$$x = a\int\left(\lambda z^{\frac{2K}{1-K}} + 1 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} dz, \tag{8}$$

où l'intégrale du second membre est une intégrale de différentielle binome, où λ est une constante d'homothétie, et K, a des paramètres de forme.

Pour chaque valeur de K il existe [une homothétie étant négligée, et deux surfaces (A) parallèles n'étant pas considérées comme distinctes], ∞^1 surfaces (A) dont les déférentes sont définies par l'équation (8), où le seul paramètre de forme est a; en outre, d'après la première équation (6), le rayon R de la sphère S centrée au point M(x, z) de la déférente correspondant à une valeur déterminée a du paramètre de forme, est $R = \frac{x}{a}$, ce qui prouve que ce rayon est proportionnel à la distance du point M à la droite fixe Oz, située dans le plan de la déférente C et perpendiculaire au plan de base, le coefficient de proportionnalité étant $\frac{1}{a}$. Si l'on appelle *base* d'une courbe (8) l'axe Ox du système auquel la courbe est rapportée, et si l'on tient compte de ce que, comme on l'a déjà observé, les déférentes C ne sont définies, par l'équation (8), qu'à une translation parallèle à Ox près, on voit que Oz peut être considérée comme une perpendiculaire *quelconque* à la base de l'une quelconque des courbes envisagées, et présenter ainsi la définition géométrique des surfaces (A) de la deuxième classe signalée dans l'Introduction.

Ces surfaces sont *les enveloppes d'une sphère dont le centre décrit une courbe* (8) *quelconque* (*à paramètre a*), *et dont le rayon* R *varie proportionnellement à la distance* MH *du centre* M *à une perpendiculaire quelconque à la base de la courbe* C *envisagée; le coefficient de proportionnalité est l'inverse du paramètre a de* C $\left[R = \frac{MH}{a}\right]$.

5. *Les trois types de surfaces* (A). *Premier type.* — Il convient maintenant d'envisager trois types distincts de surfaces (A), correspondant aux trois cas où le paramètre a de la déférente est supérieur, inférieur ou égal à *un*. Supposons $a > 1$; nous allons voir que l'ensemble des déférentes C, relatives aux diverses valeurs du rapport constant K dans lequel le plan de base de (A) partage les différents segments principaux, *est fourni par l'ensemble des projections orthogonales des différentes courbes de Ribaucour sur les divers plans issus de leurs bases.*

Définissons une courbe quelconque de Ribaucour en nous donnant le rapport $\frac{\overline{PQ}}{\overline{\omega Q}} = K$, P étant un point quelconque de la courbe, ω le centre de courbure correspondant, et Q le point où la normale en P coupe la base. La base étant prise pour axe Ox du système rectangulaire ($xO\zeta$), l'équation diffé-

rentielle des courbes de Ribaucour correspondant à une valeur quelconque du rapport constant K (défini comme ci-dessus) est comme on le voit sans peine

$$1+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2+\frac{K-1}{K}\zeta\frac{d^2\zeta}{dx^2}=0. \tag{9}$$

Supposons que le plan $x0\zeta$ fasse l'angle θ avec le plan $x0z$ du système $0xyz$ et projetons orthogonalement, sur le plan $x0z$, une courbe intégrale quelconque de l'équation (9). L'équation différentielle de la famille des courbes projections se déduit de (9) en y remplaçant $\xi\zeta$ par $\frac{z}{\cos\theta}$; on trouve ainsi, après une transformation évidente,

$$1+\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{K-1}{K}z\frac{d^2z}{dx^2}=\sin^2\theta, \tag{10}$$

et l'on voit qu'il suffit de choisir θ tel que $\sin\theta=\frac{1}{a}$, ce qui est possible puisqu'on suppose $a>1$, pour identifier l'équation (10) avec l'équation (7) du n° 4, définissant les déférentes C des surfaces (A) du type actuellement considéré (de paramètre $a>1$). D'une façon précise, on peut énoncer le résultat suivant.

Les déférentes C, *des surfaces* (A), *de paramètre a supérieur à* un, *et correspondant à la valeur* K *du rapport constant dans lequel le plan de base divise les différents segments principaux, s'obtiennent en projetant orthogonalement une courbe de Ribaucour quelconque, définie par le même rapport constant* K, *sur un plan, mené par sa base, et faisant avec le plan de la courbe un angle* θ *dont le sinus est égal à l'inverse du paramètre* $\left(\sin\theta=\frac{1}{a}\right)$.

Les surfaces (A) elles-mêmes *s'obtiennent en centrant en chaque point de l'une quelconque des courbes* C *ainsi obtenues une sphère de rayon* $R=\frac{MH}{a}$, MH *étant la distance du centre à une droite fixe quelconque perpendiculaire à la base de* C *dans le plan de* C, *et en prenant l'enveloppe de la famille de sphères ainsi obtenue.*

Comme nous l'avions annoncé dans l'Introduction, la famille actuelle de surfaces (A) met en jeu la famille *complète* des courbes réelles de Ribaucour, dont on vient par suite de mettre en évidence une nouvelle propriété caractéristique. Cette remarque est intéressante, en ce sens, qu'en dehors du problème qui sert de définition usuelle aux courbes de Ribaucour, il ne semble pas qu'il en ait été signalé dont la solution fournit une propriété caractéristique de cette importante famille de courbes.

6. *Surfaces du deuxième type.* — Pour les surfaces (réelles) A du type correspondant à $a<1$, il n'existe pas de transformation réelle permettant de

déduire leurs déférentes des courbes de Ribaucour. Mais, en soumettant les courbes de Ribaucour à une homologie affine orthogonale multipliant les abscisses (x) par un facteur constant imaginaire pur, on peut en déduire les déférentes des surfaces (A) du type actuel [solutions de l'équation (7) du n° 4, où $a < 1$], déférentes qui ne sont autre chose que *les transformées (réelles), par l'homologie affine ci-dessus, des arcs des courbes de Ribaucour d'ordonnée* (ζ) *réelle et d'abscisse* (x) *imaginaire pure.*

Pour le voir, il suffit de vérifier que la substitution de $\frac{ix}{m}$ à x ($m = \text{const}$), transforme l'équation (9) des courbes de Ribaucour en l'équation (7) des déférentes des surfaces (A) du type actuel ($a < 1$). La substitution indiquée transforme (9) en

$$1 + z'^2 + \frac{K-1}{K} zz'' = 1 + \frac{1}{m^2} \qquad (\text{où } z \text{ remplace } \zeta),$$

et l'identification de cette équation avec (7) est possible, car elle revient à déterminer m par la relation

$$1 + \frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2},$$

ce qui exige $a < 1$, condition vérifiée par hypothèse.

Si l'on représente une courbe quelconque de Ribaucour (définie à une homothétie près) par les équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{K-1}{K} \displaystyle\int \cos^{\frac{K-1}{K}} \varphi \, d\varphi, \\ z = \cos^{\frac{K-1}{K}} \varphi, \end{cases}$$

où K est le rapport constant $\frac{\overline{PQ}}{\overline{\omega Q}}$ défini au n° 5 et où φ est l'angle de la tangente à la courbe avec la base Ox, on constate d'ailleurs qu'il suffit de remplacer φ par $i\varphi$, pour obtenir les arcs imaginaires de la courbe qui donnent, par l'affinité purement imaginaire ci-dessus définie, les déférentes des surfaces (A) dour lesquelles $a < 1$. Ces déférentes ont pour équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{K-1}{K} m \displaystyle\int \operatorname{ch}^{\frac{K-1}{K}} \varphi \, d\varphi, \\ z = \operatorname{ch}^{\frac{K-1}{K}} \varphi. \end{cases}$$

La projection sur un plan quelconque issu de Ox n'étant autre chose (à une homothétie près) qu'une homologie affine orthogonale d'axe Oz et de rapport supérieur à un, ayant pour effet de multiplier toutes les abscisses (x) par un même nombre fixe $m > 1$, on peut unifier les résultats des n^{os} 5 et 6, et énoncer le résultat suivant.

L'ensemble complet des surfaces (A) [enveloppes de sphères de rayon variable] de paramètre a différent de *un*, peut se déduire de l'ensemble des

courbes de Ribaucour par le procédé suivant. On soumet le différentes courbes de Ribaucour [de base Ox dans le plan xOz], à une homologie affine orthogonale quelconque d'axe Oz dont le rapport est, soit un nombre *réel* (m) *supérieur à* 1, soit un nombre *purement imaginaire* (im) de module quelconque. On obtient ainsi des courbes *réelles*, provenant des arcs réels des courbes de Ribaucour dans le premier cas, et des arcs de ces mêmes courbes d'abscisse purement imaginaire (et d'ordonnée réelle) dans le second cas. Ces courbes constituent l'ensemble des déférentes des diverses surfaces (A) de paramètre différent de *un*. Les surfaces elles-mêmes sont les enveloppes des familles de sphères centrées sur l'une quelconque des courbes précédentes, le rayon $R = \frac{MH}{a}$ de la sphère génératrice étant proportionnel à la distance MH de son centre à une droite fixe quelconque du plan de la déférente normale à la base Ox. Le coefficient de proportionnalité $\frac{1}{a}$ est d'ailleurs $\frac{1}{a} = \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}$ dans le premier cas (homologie affine de rapport réel supérieur à 1), et $\frac{1}{a} = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$ dans le deuxième cas (homologie affine de rapport imaginaire pur).

Les ∞^1 surfaces (A) ayant pour déférentes les ∞^1 courbes déduites par homologie affine orthogonale, d'une même courbe de Ribaucour, admettent toutes le même rapport constant de définition [rapport dans lequel le plan de base partage les différents segments principaux], et ce rapport *est précisément le rapport* K *qui définit la courbe de Ribaucour dont les surfaces* (A) *dérivent.*

7. *Surfaces du troisième type.* — Il nous reste à présent à envisager le type de surfaces (A) pour lequel $a = 1$. Ce dernier type ne peut pas être rattaché, comme ceux qui précèdent, à la considération des courbes de Ribaucour, mais il présente cependant lui aussi un certain intérêt géométrique.

L'équation (7) définissant les déférentes s'écrit, si $a = 1$,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{K-1}{K} z \frac{d^2z}{dx^2} = 0, \tag{11}$$

et son intégration donne, une homothétie et une translation parallèle à Ox étant toujours négligées, les courbes d'équation

$$x = z^{\frac{2K-1}{K-1}}.$$

L'équation précédente est de la forme

$$x = z^{\alpha}, \tag{12}$$

et toute courbe (12), où α est un nombre quelconque, est la déférente d'une surface (A) du type actuellement envisagé. Le rapport K attaché à cette surface est

$$K = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}; \tag{13}$$

le plan de base de la surface est le plan xOy, perpendiculaire au plan de la déférente (12) suivant la droite Ox [que nous continuerons à appeler *base* de la déférente]; et, si nous convenons de dire que Oz est l'*axe* de cette même déférente, nous pouvons donner, des surfaces (A) du type actuel, la définition géométrique très simple et d'autant plus remarquable suivante.

Ce sont les surfaces enveloppes d'une sphère dont le centre décrit une courbe (12) *quelconque, en restant tangente à l'axe de la courbe* [ou à une parallèle quelconque à l'axe située dans le plan de la courbe].

Pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, le rapport K, défini par la relation (13), est nul ou infini; la déférente est une droite ou une parabole, et la surface (A) est un cône de révolution, ou une cyclide de Dupin (du troisième ordre) dont les courbes focales sont des paraboles égales.

Si l'on écrit (12) sous la forme

$$z = x^{\frac{1}{\alpha}},$$

on constate que la même courbe C d'équation (12), peut être considérée comme la déférente d'une surface (A) de deux façons différentes : On peut prendre, comme on l'a fait plus haut, pour *axe* de C la droite Oz; on peut aussi prendre pour axe Ox; le plan de base de la nouvelle surface (A_1) obtenue est alors le plan yOz; la droite à laquelle les sphères génératrices de (A_1) sont tangentes est Ox, et le rapport constant K_1 dans lequel le plan de base de (A_1) partage les différents segments principaux, que l'on obtient en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$ dans (13), est

$$K_1 = \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}; \tag{13'}$$

en comparant (13) et (13'), on voit que la substitution à effectuer sur le rapport constant K, quand on passe d'une surface (A) à la surface (A_1) de même déférente, est définie par

$$K_1 = \frac{K}{3K - 1}.$$

En posant $K_1 = K$, on obtient les deux seuls cas où les deux surfaces (A) et (A_1), relatives à une même déférente, sont identiques; ces deux cas correspondent à $K = 0$ et $K = \frac{2}{3}$; pour $K = 0$ on obtient le cas banal où C est une droite et (A) un cône de révolution; pour $K = \frac{2}{3}$, C est une hyperbole équilatère, (A) est l'enveloppe d'une sphère variable dont le centre décrit l'hyperbole et qui reste tangente à l'une des deux asymptotes, et il est clair qu'en prenant pour axe (au sens indiqué plus haut), l'une ou l'autre des deux asymptotes, on obtient la même surface (A). Dans tous les autres cas (A) et (A_1) sont distinctes.

8. *Sur la construction des centres de courbure d'une famille de courbes.* — Les résultats du numéro précédent conduisent, incidemment, à une construction géométrique très simple des centres de courbure des courbes γ ainsi définies.

Soit, dans le plan xOy (les axes étant rectangulaires) une courbe C d'équation $y = \lambda x^{\alpha}$, ou, moyennant une homothétie, $y = x^{\alpha}$, α étant un nombre quelconque positif ou négatif. Envisageons la famille des cercles centrés sur C et tangents à Ox; l'enveloppe de ces cercles se compose de Ox et d'une certaine courbe γ; les courbes dont il est question plus haut sont les courbes γ ainsi obtenues.

Si l'on considère la surface A enveloppe des sphères ayant pour grands cercles les cercles précédents, cette surface appartient au type (A) envisagé au n° 7; elle admet pour plan de base le plan perpendiculaire au plan de C le long de Oy, et le rapport constant dans lequel le plan de base partage les différents segments principaux est $K = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$. La courbe γ précédemment définie est la section de A par le plan xOy (abstraction faite de la droite Ox); d'autre part, si Σ est la deuxième nappe de la développée de A, la normale à A en un point quelconque P de γ s'appuie sur C en un certain point M (premier centre de courbure principal), et touche Σ en un point N, qui est le deuxième centre de courbure principal de A, et, en même temps, le centre de courbure de la courbe γ relatif au point P.

De ces remarques résulte la construction suivante du centre de courbure N de γ en son point courant P. On détermine le point d'intersection I de la normale en P à γ avec Oy, et l'on prend, sur cette normale, le point N défini par

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha},$$

M étant le point de C, correspondant au point P de γ, dans la construction géométrique de γ à partir de C. On constate aussitôt que, pour avoir le centre de courbure N, *il suffit de porter, sur la normale* MI, *le segment* $\overline{MN}$ *de valeur algébrique* $\overline{MN} = \frac{\overline{MI}}{\alpha - 1}$.

Bien que les courbes γ soient beaucoup plus complexes que les courbes C dont elles dérivent, la détermination de leurs centres de courbure peut se faire au moyen d'une construction géométrique dont il convient au moins de noter la remarquable simplicité. Les exemples donnant lieu à des énoncés géométriques élégants sont nombreux. Nous n'insisterons pas sur ce sujet, mais nous ferons cependant la remarque suivante.

Si l'on envisage C comme la section droite d'une surface réfléchissante cylindrique, la courbe (N) lieu de N est la *caustique par réflexion*, relative aux rayons parallèles à l'axe Oy (enveloppe du faisceau réfléchi de celui constitué par les rayons parallèles à Oy). On peut donc dire que *les caustiques par*

réflexion d'une courbe C[$y = x^2$], *relatives aux faisceaux de rayons parallèles à l'un ou à l'autre des deux* AXES (*rectangulaires*) *de la courbe, sont telles, que les portions de rayons réfléchis limités à la courbe réfléchissante et à la caustique, sont partagés dans un rapport constant par l'une ou l'autre de deux droites fixes.* Ces droites, lieux des points I définis (avec les notations ci-dessus) par $\frac{\overline{IM}}{IN} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$, ne sont d'ailleurs autre chose que les deux *axes* de la courbe réfléchissante. On voit en outre, que si les déférentes C des surfaces (A) du troisième type ne sont pas, comme celles des deux premiers, liées d'une façon simple aux courbes de Ribaucour, elles n'en présentent pas moins (et cela de deux façons différentes) une propriété géométrique rappelant la propriété qui sert de définition aux courbes de Ribaucour.

9. *Remarques sur les surfaces* Σ. — Relativement aux surfaces Σ, nappes non curvilignes des développées des surfaces (A) dont il est question dans cet article [autres que les surfaces canaux du n° 3], nous pouvons faire les remarques suivantes. Dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale* précédemment cité, nous avons observé que les développées Σ des surfaces (A) à développée moyenne plane [correspondant à K = — 1] étaient coupées, par les plans parallèles au plan de base, suivant une famille de coniques deux à deux homothétiques, les cônes circonscrits aux surfaces Σ le long de ces coniques étant tous de révolution. Cette propriété subsiste, pour les surfaces Σ, développées des différentes surfaces (A) relatives aux diverses valeurs du rapport constant K. Ces surfaces sont en effet engendrées par la conique (σ), section du cône (de révolution) Ω défini au n° 2, et dont l'équation est l'équation (2) du n° 4, par le plan (3); d'autre part, Ω est circonscrit à Σ le long de (σ) qui est sa courbe caractéristique. Pour vérifier que les différentes coniques σ situées sur une même surface Σ sont deux à deux homothétiques, il suffit, puisque les plans de ces coniques sont tous parallèles au plan de base xOy de la surface (A) correspondante, de vérifier qu'il en est ainsi pour les sections du cône Ω par le plan xOy. Les équations de ces sections sont, comme le montre l'équation (2) du n° 4 où l'on tient compte des relations (6),

$$(14) \qquad (1-a^2)(X-x)^2 + Y^2 = a^2 z^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

où X et Y sont les coordonnées courantes, et x, z les coordonnées du sommet du cône dans le plan xOz. On constate que les coniques (14) sont bien deux à deux homothétiques, et que ce sont :

— des *hyperboles*, si $a > 1$, c'est-à-dire pour les surfaces (A) du premier type envisagé dans l'étude actuelle;

— des *ellipses*, si $a < 1$ [surfaces (A) du second type];

— des *paraboles*, si $a = 1$ [surfaces (A) du troisième type].

Les surfaces Σ présentent la particularité d'admettre un réseau conjugué *géodésio-conique*, les deux familles de courbes du réseau étant la famille des courbes de niveau constituée par les coniques deux à deux homothétiques qui viennent d'être mises en évidence, et la famille des géodésiques enveloppées sur Σ par les rayons de la congruence des normales à (A). La recherche des surfaces les plus générales portant des réseaux du type indiqué sera faite au numéro suivant.

Nous signalerons ici que, le rayon de la sphère S enveloppant une surface (A) étant une fonction algébrique des coordonnées du centre $\left(R = \frac{x}{a}\right)$, il suffira, pour obtenir les surfaces Σ *algébriques* portant des réseaux géodésio-coniques de l'espèce envisagée, de considérer les surfaces (A) à *déférentes algébriques*. Les déférentes provenant par affinité des courbes de Ribaucour, les surfaces Σ algébriques proviendront des courbes de Ribaucour algébriques, et ces dernières courbes sont celles pour lesquelles le rapport K de définition (n° 5) a une expression de la forme

$$K = \frac{1}{2n+1} \qquad (n = \text{entier} > 0),$$

ou

$$K = \frac{1}{2n} \qquad (n = \text{entier} < 0).$$

Dans le cas particulier $a = 1$, pour lequel les coniques du réseau porté par Σ sont des paraboles, les déférentes sont définies par les différentes équations de la forme $x = z^{\alpha}$, et les surfaces Σ seront algébriques pour toutes les valeurs rationnelles de α.

10. *Surfaces générales admettant un réseau conjugué formé de courbes deux à deux homothétiques et de géodésiques.* — Si l'on écarte le cas évident des cônes (ou des cylindres), la solution du problème considéré peut être rattachée à la recherche, faite au n° 4, des surfaces enveloppes de sphères de rayon variable du type (A).

Désignons par Θ l'une des surfaces cherchées, et soient (σ) les courbes, deux à deux homothétiques, constituant la première famille du réseau. Une courbe σ et la courbe infiniment voisine, étant homothétiques, sont situées sur un même cône Ω circonscrit à Θ le long de σ, et les tangentes aux courbes de la seconde famille du réseau, aux points où elles coupent la courbe σ de la première famille, sont distribuées suivant les génératrices de Ω. Il résulte de là que Θ est la nappe non curviligne de la développée d'une surface (B) enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre admettant, pour déférente, la courbe C décrite par le sommet M du cône Ω circonscrit à Θ le long de σ, lorsque σ décrit la série des ∞^1 courbes de la première famille du réseau. Les normales à une surface enveloppe de sphères issues d'un même point M de la nappe curviligne

de développée, étant distribuées suivant les génératrices d'un cône de révolution, Ω est de révolution, et, comme on l'a vu au n° 4, σ est une section plane de ce cône. Les réseaux du numéro actuel constituent donc la famille la plus générale des réseaux géodésio-coniques à coniques deux à deux homothétiques, dont le numéro précédent nous a offert quelques exemples particuliers. La détermination des surfaces Θ portant ces réseaux revient à celle des surfaces développantes (B). Prenons, comme nous l'avons fait pour les surfaces (A), pour éléments inconnus propres à déterminer les surfaces (B) et les surfaces Θ associées, le lieu (C) des centres des sphères S dont (B) est l'enveloppe, et la loi de variation du rayon R de S quand son centre décrit C. Le cône Ω dont le sommet est le point M(x, y, z) de C, a pour équation l'équation (2) du n° 4

$$\sum (X-x)^2 = \left[\sum (X-x)\frac{dx}{dR}\right]^2, \tag{2}$$

et la conique σ de contact de Ω avec Θ est définie (*voir* le n° 4) par l'intersection de Ω et du plan

$$\sum (X-x)\frac{d^2x}{dR^2} - \sum \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + 1 = 0. \tag{3}$$

Les coniques σ étant supposées non dégénérées, le rayon R de S n'est pas constant (*voir* le n° 3), et l'on peut le prendre pour variable indépendante. En exprimant que le plan (3) de la conique σ est parallèle au plan xOy, on obtient les deux relations

$$\frac{d^2x}{dR^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dR^2} = 0, \tag{4}$$

qui constituent *ici* les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que C soit la déférente d'une surface du type (B).

Ces relations montrent que C est une courbe *plane quelconque*. En prenant le plan de C pour plan xOz, et en négligeant une translation parallèle à Ox, on aura, comme au n° 4,

$$y = 0, \qquad x = aR \qquad (a = \text{const. arb.}),$$

et l'on voit que, comme pour les surfaces (A), le rayon de la sphère S dont le centre M décrit C et qui enveloppe une surface (B) *est proportionnel à la distance* MH *du centre à la droite fixe* Oz, droite qui, étant donné le caractère absolument arbitraire de la courbe C, peut être considérée comme la droite *la plus générale du plan*. De là résulte l'élégante construction géométrique suivante, des surfaces Θ, admettant un réseau conjugué formé de coniques deux à deux homothétiques et de géodésiques, dont nous nous étions proposé la recherche.

Donnons-nous, dans un plan Π, *une courbe quelconque* C *et une droite également quelconque* D. *Envisageons une sphère variable* S, *dont le centre* M *décrit* C,

et dont le rayon R *varie proportionnellement à la distance* MH *du centre à la droite fixe* D, *le coefficient de proportionnalité étant quelconque. Cette sphère enveloppe une certaine surface* B. *La surface* Θ *la plus générale est la nappe, autre que la courbe* C, *de la développée de* B.

Le réseau géodésio-conique porté par Θ est le réseau focal de la congruence des normales à B.

La détermination des équations explicites des surfaces Θ dont on vient d'indiquer la construction géométrique ne présente pas de difficulté. Prenons l'équation de la courbe C sous la forme $z = f(x)$, f étant une fonction arbitraire de l'argument x dont nous désignerons les dérivées par f', f'', et supposons la droite D confondue avec Oz; nous définissons ainsi, une fois fixé le coefficient de proportionnalité liant R à MH $\left[R = \frac{1}{a}MH\right]$, une surface déterminée Θ. La conique de contact, σ, de Θ et du cône circonscrit ayant pour sommet le point M de C de cote $z = f(x)$, est définie par les deux équations (2) et (3) qui, si l'on tient compte des coordonnées $[x = aR,\ y = 0,\ z = f(x)]$ de M, s'écrivent respectivement

$$(15) \qquad (1-a^2)(X-x)^2 + Y^2 - a^2 f'^2 (Z-f)^2 - 2a^2 f'(X-x)(Z-f) = 0,$$

$$(16) \qquad Z - f = \frac{a^2(1+f'^2)-1}{a^2 f''},$$

où les coordonnées courantes sont X, Y, Z.

L'équation de σ dans son plan s'obtient en remplaçant dans (15) $(Z-f)$ par son expression (16); on trouve ainsi

$$(17) \quad (1-a^2)(X-x)^2 + Y^2 - 2\frac{f'}{f''}[a^2(1+f'^2)-1](X-x) - \frac{f'^2}{a^2 f''^2}[a^2(1+f'^2)-1]^2 = 0.$$

La conique sera une ellipse ou une hyperbole si $a \neq 1$, et une parabole si $a = 1$. Plaçons-nous d'abord dans le cas $a \neq 1$. Le centre, situé sur l'axe X'X, a alors pour abscisse

$$X_0 = x + \frac{f'[a^2(1+f'^2)-1]}{f''(1-a^2)},$$

le demi-axe porté par X'X a pour longueur

$$m = \left| \frac{f'[a^2(1+f'^2)-1]}{a(1-a^2)f''} \right|,$$

et l'expression du demi-axe perpendiculaire au précédent, qui n'est réel que si σ est une ellipse $(a < 1)$, est

$$n = \left| \frac{f'[a^2(1+f'^2)-1]}{a\sqrt{1-a^2}\,f''} \right|,$$

La conique σ peut être définie, dans son plan, par les équations

$$X = X_0 + m\cos\varphi, \qquad Y = n\sin\varphi,$$

ou

$$X = X_0 + m\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad Y = n\,\mathrm{sh}\,\varphi,$$

suivant que $a < 1$ ou $a > 1$. En adjoignant aux expressions précédentes de X, Y l'expression de la cote Z de la conique, fournie par l'équation (16), et en remplaçant X_0, m, n par leurs valeurs, on obtient pour équations paramétriques des surfaces Θ les équations (18) ou (19) ci-dessous :

$$(18)\qquad \begin{cases} X = x + \Psi(a + \cos\varphi), \\ Y = \sqrt{1 - a^2}\,\Psi\sin\varphi, \\ Z = f + \dfrac{\Psi}{af'}; \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} X = x + \Psi(a + \mathrm{ch}\,\varphi), \\ Y = \sqrt{a^2 - 1}\,\Psi\,\mathrm{sh}\,\varphi, \\ Z = f + \dfrac{\Psi}{af'}, \end{cases}$$

suivant que les coniques (σ) sont des ellipses ($a < 1$) ou des hyperboles ($a > 1$), et après avoir posé pour simplifier

$$\Psi = \frac{f'[a^2(1 + f'^2) - 1]}{a(1 - a^2)}.$$

En remplaçant, dans les équations précédentes, f par une fonction arbitraire de x, on obtient l'ensemble des surfaces Θ cherchées; les paramètres fixant le point courant M sur chacune de ces surfaces sont : x [cote du sommet du cône de révolution circonscrit à Θ le long de la conique σ], et φ qui fixe la position de M sur σ.

Les équations des surfaces Θ pour lesquelles les sections planes σ sont paraboliques, se déduisent des équations (16) et (17) en posant $a = 1$. Si l'on désigne par u l'ordonnée d'un point quelconque sur une parabole quelconque σ, on trouve aussitôt

$$(20)\qquad \begin{cases} X = x + \dfrac{f''^2 u^2 - f'^6}{2 f'' f'^3}, \\ Y = u, \\ Z = f + \dfrac{f'^2}{f''}; \end{cases}$$

les paramètres sont x et u, et l'on obtient l'ensemble des surfaces Θ du type actuel, en donnant à la fonction f de l'argument x toutes les formes possibles. Toutes les surfaces (18), (19), (20) admettent évidemment le plan xOz comme plan de symétrie.

Le réseau géodésio-conique *le plus général* (pour lequel aucune condition n'est imposée *a priori* aux coniques qui en font partie), est évidemment consti-

tué par le réseau focal (porté par la nappe de développée non curviligne) d'une surface enveloppe de sphères *arbitraire*. Si l'on veut obtenir des réseaux donnant lieu à des constructions géométriques intéressantes, il convient de particulariser convenablement la famille des coniques; c'est ce qui a été fait dans les numéros qui précèdent, et ce que nous ferons encore au numéro suivant.

11. *Sur quelques autres types de réseaux géodésio-coniques.* — Nous allons rechercher, pour terminer, les réseaux dont une famille de courbes est formée de géodésiques, et dont l'autre famille est constituée par des coniques dont les plans sont parallèles à une droite fixe, ou bien passent par un point fixe ou par une droite fixe.

Le premier de ces problèmes est une généralisation immédiate du problème traité au n° 10. Considérons encore les surfaces Θ portant des réseaux géodésio-coniques pour lesquels les plans des coniques sont parallèles à une droite fixe, comme les nappes non curvilignes des développées d'une famille d'enveloppes de sphères à déterminer.

Supposons que la droite fixe soit Ox; il suffira, pour exprimer toutes les conditions du problème, d'exprimer que le plan (3) du n° 4 est constamment parallèle à Ox; cela donne l'unique condition

$$\frac{d^2x}{d\mathrm{R}^2} = 0,$$

d'où l'on déduit, en négligeant une translation

$$x = a\mathrm{R} \qquad (a = \text{const.}),$$

condition qui exprime, que le rayon de la sphère qui engendre les surfaces dont les nappes non curvilignes de développées sont les surfaces Θ, est proportionnel à la distance du centre à un plan fixe arbitraire perpendiculaire à la direction de droite commune aux plans des coniques du réseau envisagé. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les réseaux géodésio-coniques dont les coniques sont situées dans des plans parallèles à une droite fixe D, *sont les réseaux focaux, des congruences des normales aux enveloppes d'une sphère variable, dont le centre décrit une courbe arbitraire, et dont le rayon varie proportionnellement à la distance du centre à un plan fixe quelconque perpendiculaire à* D.

Comme dans les exemples précédemment obtenus, les coniques des réseaux sont des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, suivant que le coefficient de proportionnalité est supérieur, inférieur ou égal à l'unité.

Cherchons maintenant les réseaux géodésio-coniques pour lesquels les plans des coniques *passent par un point fixe* O. Ce point étant pris pour origine des

coordonnées, et les surfaces cherchées étant regardées, comme on l'a toujours fait jusqu'ici, comme les nappes non curvilignes des développées d'une surface enveloppe de sphères dont il s'agit de déterminer la déférente et la loi de variation du rayon, exprimons que le plan de la conique définie par les équations (2), (3) du n° 4 passe constamment par O. Nous obtenons l'équation

$$\sum\left[x\frac{d^2x}{d\mathrm{R}^2}+\left(\frac{dx}{d\mathrm{R}}\right)^2\right]=1,$$

soit, en désignant par ρ la distance du point courant M de la déférente au point fixe O

$$\frac{d^2(\rho^2)}{d\mathrm{R}^2}=2.$$

On en déduit la condition nécessaire et suffisante suivante, liant le rayon vecteur OM au rayon R de la sphère S centrée en M

$$\rho^2=\mathrm{R}^2+a\mathrm{R}+b \qquad (a,\ b=\text{const. arb.}).$$

Si l'on ajoute une constante à R, on ne modifie pas la développée de la surface enveloppe de S (ni le réseau focal porté par cette surface). En disposant de cette constante on peut donner à la relation entre R et ρ la forme

$$\rho^2=\mathrm{R}^2+k \qquad (k=\text{const. arb.}). \tag{21}$$

(21) exprime que la sphère S reste orthogonale à la sphère fixe, de centre O, et de rayon $\sqrt{k}$ ou $i\sqrt{|k|}$, suivant que le nombre k est positif ou négatif. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les surfaces admettant un réseau conjugué dont les deux familles de courbes sont constituées, respectivement, par ∞^1 géodésiques et par ∞^1 coniques dont les plans passent par un point fixe, sont les nappes non curvilignes des développées des enveloppes à un paramètre de sphères orthogonales à une sphère fixe (S_1) *réelle ou de rayon purement imaginaire*).

On a une vérification immédiate du résultat précédent en prenant, pour déférente de la famille de sphères (S), une courbe plane C située dans un plan π passant par le centre O de la sphère (S_1). Le cercle γ caractéristique de S, perce le plan π en deux points μ, μ', qui décrivent deux courbes (μ) et (μ') inverses par rapport à O, et dont l'ensemble constitue la section de l'enveloppe (E) de (S) par le plan π.

La nappe non curviligne de la développée de (E) est l'enveloppe (abstraction faite de la courbe C) du cône de révolution, ayant pour sommet le centre M de S, et pour base le cercle γ. La conique caractéristique (σ) de ce cône, dont le plan est perpendiculaire à π, perce π en deux points ω et ω', qui sont évidemment les points caractéristiques des génératrices Mμ, Mμ' du cône situées dans π, et qui coïncident par suite avec les centres de courbure des courbes (μ)

et (μ') relatifs aux points μ et μ'. Les courbes (μ) et (μ') étant inverses dans une inversion de pôle O, leurs centres de courbure aux points inverses μ et μ' sont alignés avec O, et le plan de la conique (σ) *passe bien par le point fixe* O.

Dans l'exemple qui vient d'être donné, les plans des coniques, non seulement passent par le point fixe O, mais contiennent tous la droite fixe D perpendiculaire au plan π en O. Il est facile de se rendre compte qu'il n'existe pas d'autres réseaux géodésio-coniques dont les plans des coniques passent par une droite fixe D, que ceux fournis par l'exemple précédent. La sphère S enveloppant, dans son mouvement à un paramètre, une surface admettant pour développée le support de l'un des réseaux considérés ici, devra rester orthogonale à deux sphères fixes (quelconques d'ailleurs, de rayons réels ou imaginaires purs), centrées en deux points quelconques O_1 et O_2 de la droite fixe D. La sphère S devra donc appartenir constamment à un réseau de sphères d'axe D; la déférente C est par suite une courbe plane, quelconque d'ailleurs, située dans un plan perpendiculaire à D en un certain point fixe O, et la sphère S centrée en un point quelconque de C est définie par la condition de rester orthogonale à une sphère fixe de centre O. Nous retrouvons bien les réseaux fournis par l'exemple précédemment traité, et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Les surfaces (Σ) *admettant des réseaux géodésio-coniques, pour lesquels les plans des coniques passent par une droite fixe* D, *sont les nappes non curvilignes des développées des surfaces enveloppes de* ∞^1 *sphères appartenant à un réseau quelconque d'axe* D.

Les réseaux géodésio-coniques eux-mêmes, sont les réseaux focaux des congruences des normales aux enveloppes de sphères qui viennent d'être définies.

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

DES

OSCILLATIONS DE RELAXATION

PAR M. J. HAAG.

Introduction.

1. *Oscillations auto-entretenues.* — Soit un point P, de masse m, assujetti à se déplacer sur l'axe Ox sous l'action de la force élastique $-kx$ et de la résistance visqueuse $-\frac{f(x)}{\varepsilon}\frac{dx}{dt}$, ε désignant une constante positive. L'équation différentielle du mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f(x)}{\varepsilon}\frac{dx}{dt}+kx=0. \tag{1}$$

On peut la ramener au premier ordre par un procédé classique; mais, nous allons procéder d'une manière un peu différente, pour aboutir tout de suite à la *représentation de M. Liénard* (1). Posons $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, puis

$$\lambda=\frac{1}{m\omega}\int_0^x f(x)dx, \qquad y=\lambda+\frac{\varepsilon v}{\omega}, \tag{2}$$

en appelant v la vitesse du point P. L'équation (1) s'écrit

$$\frac{dy}{dt}=-\varepsilon\omega x. \tag{3}$$

On a ensuite

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{\varepsilon}(y-\lambda). \tag{4}$$

(1) *Revue générale d'Électricité*, t. 23, 1928, p. 901.

En éliminant dt, on obtient l'équation du premier ordre

$$\varepsilon^2 x\,dx + (y-\lambda)\,dy = 0. \tag{5}$$

Appelons M le point qui a pour coordonnées cartésiennes x et y. Sa *trajectoire* est une courbe intégrale de l'équation (5). Elle est déterminée par la connaissance du point M_0 correspondant à $t=0$, lequel est lui-même déterminé par les conditions initiales x_0 et y_0 du point P. Cette trajectoire étant connue, on a la loi du mouvement, d'après (3), par l'intégrale curviligne

$$\varepsilon\omega t = -\int_{M_0}^{M} \frac{dy}{x} = \varepsilon^2 \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{y-\lambda}. \tag{6}$$

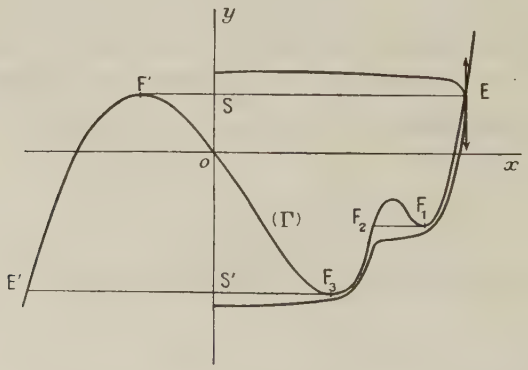
La détermination des *oscillations auto-entretenues*, c'est-à-dire des mouvements périodiques de P, équivaut à la recherche des *trajectoires fermées*, c'est-à-dire des *cycles* de l'équation (5).

2. *Oscillations de relaxation.* — Lorsque la constante ε est très petite, les oscillations auto-entretenues présentent des caractères très particuliers et portent le nom d'*oscillations de relaxation*. Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

1° *Faire l'étude asymptotique des trajectoires*, quand ε est infiniment petit.
2° *Calculer la valeur asymptotique du temps.*

3. *Courbe fondamentale.* — Nous appellerons ainsi la courbe représentative de la fonction λ. Cette courbe (Γ) passe à l'origine, où nous supposerons qu'elle

Fig. 1.



admet une tangente à pente négative, ce qui revient à dire que, pour les petites valeurs de x, la force visqueuse est en réalité une force motrice. Par contre, pour les grandes valeurs de x, c'est une véritable résistance, et nous admettrons que la courbe (Γ) finit par rester au-dessus de Ox, du côté des x positifs et au-dessous de Ox, du côté des x négatifs.

4. *Allure générale d'une trajectoire.* — Supposons $x_0 > 0$ et $v_0 = 0$. D'après (1), $x_0'' < 0$; donc, si t augmente, v diminue et devient < 0; le point P va dans le sens négatif. Sa vitesse ne peut s'annuler tant qu'il n'a pas atteint le point O. En effet, si v s'annulait pour $x > 0$, ce serait en croissant; donc sa dérivée x'' serait positive, ce qui serait contradictoire avec l'équation (1).

Si t diminue, v augmente et devient > 0; P va encore dans le sens négatif et l'on montre comme ci-dessus que sa vitesse ne peut s'annuler tant que $x > 0$.

Interprétons ceci sur la trajectoire. Elle part du point E, situé sur (Γ), avec une tangente verticale. Qu'elle soit parcourue dans le sens du mouvement ou en sens inverse, elle se rapproche constamment de Oy, de sorte que E est son point le plus à droite et sera appelé le *point terminal*. Les formules (3) et (4) nous montrent ensuite que la trajectoire descend constamment et reste au-dessous de (Γ), si elle est parcourue dans le sens du mouvement; elle monte et reste au-dessus de (Γ) quand on la parcourt en sens inverse.

Nous appellerons *arc supérieur* et *arc inférieur* les portions de trajectoire respectivement situées au-dessus et au-dessous de la courbe fondamentale et limitées à droite par le point terminal, à gauche par les deux points de rencontre S et S′ avec Oy, qui seront appelés le *sommet supérieur* et le *sommet inférieur*.

5. *Trajectoire limite; déviation.* — Si ε tend vers zéro, l'équation (5) devient à la limite

$$(y - \lambda)\, dy = 0.$$

La trajectoire limite est donc nécessairement constituée par des segments horizontaux et des arcs de (Γ), qui seront appelés respectivement *arcs de première espèce* et *arcs de seconde espèce*. Nous appellerons *point frontière de première espèce* tout point F limitant à droite un arc de première espèce, et *point frontière de seconde espèce* tout point F limitant à droite un arc de seconde espèce.

Les mêmes dénominations seront employées pour la trajectoire vraie, les abscisses des points frontière étant les mêmes que pour la trajectoire limite.

Soit M un point quelconque de la trajectoire vraie et M′ le point de même abscisse pris sur la trajectoire limite. Nous appellerons *déviation* en M la distance $D = MM'$. Cette déviation est nulle au point terminal; elle est partout infiniment petite avec ε.

Nous supposerons enfin que x_0 a été choisi assez grand pour que l'arc supérieur limite soit constitué par un seul segment.

6. *Convergence des trajectoires.* — Considérons deux trajectoires (1) inférieures C et C′. Appelons y et y' les ordonnées des points de ces deux courbes

(1) Il s'agit ici de deux trajectoires vraies.

qui ont pour abscisse x. Posons

$$\lambda - y = u, \qquad \lambda - y' = u', \qquad y - y' = \eta.$$

On a

$$\frac{d\eta}{dx} = \varepsilon^2 \frac{x\eta}{uu'}.$$

Si l'on appelle η_0 la valeur de η pour $x = x_0$, on a

$$\eta = \eta_0 e^{-h}, \qquad h = \varepsilon^2 \int_x^{x_0} \frac{x}{uu'}\, dx. \tag{7}$$

Si l'on suppose que x décroisse à partir de x_0, on voit que η décroît constamment à partir de η_0. Autrement dit, *la distance verticale entre deux trajectoires inférieures diminue constamment avec x;* ce que l'on peut exprimer brièvement en disant que *les trajectoires convergent vers la gauche*.

Cette propriété est évidemment valable pour deux trajectoires supérieures; mais, elle serait renversée si C et C′ désignaient une trajectoire supérieure et une trajectoire inférieure.

Une conséquence importante est que si, dans le calcul approché d'une trajectoire, on commet au point M_0 une erreur η_0, l'erreur qui en résulte pour l'arc situé à gauche de M_0 est toujours inférieure à η_0 en valeur absolue et décroît constamment quand on se rapproche de Oy. Pour cette raison, *les trajectoires seront toujours calculées en partant du point terminal et en se dirigeant vers* Oy.

7. *Hypothèses sur la courbe fondamentale.* — Nous supposerons que la fonction $f(x)$ est finie quel que soit x. Nous supposerons aussi qu'elle est continue, sauf peut-être pour certaines valeurs de x en nombre fini.

Il s'ensuit que la courbe (Γ) est une courbe continue, admettant partout une tangente non parallèle à Oy, mais pouvant présenter quelques points anguleux.

Nous supposerons aussi que tout arc de seconde espèce est constitué par la juxtaposition d'un nombre fini d'arcs partiels, sur chacun desquels la fonction λ admet des dérivées jusqu'à un ordre illimité. La dérivée première λ' ne pourra s'annuler en aucun point autre que le point frontière de gauche.

Soit $F(a, b)$ un point frontière situé à droite de Oy. Dans le voisinage de ce point, nous poserons

$$x = a + \sigma\xi, \qquad \lambda = b + \sigma' A \xi^r, \tag{8}$$

où r désigne un exposant entier ou fractionnaire ≥ 1 et A une fonction de ξ, holomorphe et positive au voisinage de $\xi = 0$. Quant à σ et σ', ils représentent ± 1 et ont respectivement le signe de $x - a$ ou de $\lambda - b$. Le nombre r pourra ne pas être le même à droite et à gauche d'un point frontière de première

espèce; il sera appelé *l'ordre à droite* ou *à gauche* de ce point. Si F est de seconde espèce, on aura $r = 1$ à droite et à gauche.

Nous poserons enfin

$$A = A_0(1 + B\xi), \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n. \tag{9}$$

Nous appellerons ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série ci-dessus et M le maximum de $|B|$ pour $|\xi| \leq \rho$.

8. *Principe de la méthode de calcul.* — Le calcul de la déviation et du temps se fait aisément par des développements en série convergente ou en série asymptotique, tant qu'on est à une distance finie des points frontière. *La grosse difficulté réside dans la traversée de ces points.* Nous effectuerons cette traversée au moyen de changements de variables convenablement choisis et en calculant toujours la déviation et le temps par des séries asymptotiques.

Le raccordement d'un point frontière avec l'arc antérieur ou postérieur pourra toujours se faire, parce qu'il existera toujours une région où les deux méthodes de calcul sont *simultanément applicables*. Dans chaque cas, les coefficients des séries utilisées se détermineront par des quadratures, introduisant chacune une *constante d'intégration inconnue*. Cette constante sera obtenue par comparaison du développement nouveau avec le développement antérieur, cette comparaison ne portant d'ailleurs que sur ce que nous appellerons le *noyau* du coefficient.

Nous pourrons ainsi calculer de proche en proche tous nos développements depuis le point terminal jusqu'à l'axe Oy.

Ces développements procèdent suivant certaines puissances entières ou fractionnaires de ε et peuvent aussi contenir $\log\varepsilon$ et même $\log(-\log\varepsilon)$ à des puissances entières positives ou négatives. *La nature de chaque développement est uniquement déterminée par les ordres à droite et à gauche du point frontière de première espèce antérieur à l'arc considéré.* Mais, *toutes les singularités sont en quelque sorte absorbées par les arcs de seconde espèce*, du moins en ce qui concerne la déviation.

Dans ce qui va suivre, nous dirons qu'une fonction de ε est *d'ordre m* si elle est de l'ordre de $\varepsilon^m(-\log\varepsilon)^p$, p étant un exposant quelconque, positif ou négatif. Si $m = 0$, nous dirons aussi qu'elle est *d'ordre logarithmique*. Nous dirons enfin qu'elle est *d'ordre exponentiel* si elle est de l'ordre de $e^{\frac{-k}{\varepsilon^p}}$, k et p désignant des nombres positifs quelconques.

9. *Division du présent Mémoire.* — Dans le premier chapitre, nous établirons certains *théorèmes préliminaires* destinés à légitimer les développements calculés ultérieurement.

Les chapitres II, III et IV seront consacrés respectivement au calcul de *l'arc supérieur*, d'un *arc de seconde espèce* et d'un *arc de première espèce*.

Dans le chapitre V, nous ferons le *calcul effectif des premiers termes* de nos développements, en envisageant successivement diverses hypothèses concernant les points frontière.

Le chapitre VI sera consacré au calcul de *l'amplitude et de la période* des oscillations.

Enfin, *plusieurs Notes* ont été renvoyées à la fin du Mémoire, parce qu'elles présentent un caractère général et aussi pour alléger la rédaction des différents chapitres.

Dans un travail ultérieur, nous intégrerons numériquement l'équation différentielle de raccordement, pour $r = 2$, par les fonctions de Bessel. Nous appliquerons ensuite les résultats du présent Mémoire à des exemples concrets.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

I. — Partie centrale d'un arc de première espèce.

10. *Calcul de la déviation.* — Considérons un arc de première espèce, dont les points frontière F et F′ de droite et de gauche ont pour coordonnées respectives (a, b) et (a', b). Appelons $L(x)$ la valeur absolue de $\lambda - b$ pour $a' < x < a$. La déviation D vérifie l'équation différentielle

$$D'(x)[D(x) + L(x)] = -\varepsilon^2 x, \tag{10}$$

qu'il s'agisse de l'arc supérieur ou d'un arc inférieur. Supposons d'autre part que l'on connaisse la déviation D_0 pour une valeur x_0 de x comprise entre a et a' et proposons-nous de calculer $D(x)$, pour $x_0 > x > x_1 > a'$. *Considérant* ε^2 *et* D_0 *comme deux variables complexes indépendantes*, nous allons montrer que D *est une fonction holomorphe de ces deux variables*, pour

$$|\varepsilon^2| < R, \qquad |D_0| < R', \qquad x_1 < x < x_0,$$

à condition de choisir R *et* R′ *assez petits*.

A cet effet, posons $D = D_0 + X$; la fonction X doit s'annuler pour $x = x_0$ et vérifier l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dx} = -\varepsilon^2 \frac{x}{D_0 + X + L} = F(x, X, \varepsilon^2, D_0).$$

Nous allons maintenant appliquer la note (A), en prenant pour fonction $\psi(x)$ la fonction $k_1 L(x)$, k_1 désignant une constante comprise entre zéro et *un*. La fonction $L(x)$, étant continue et positive dans l'intervalle (x_1, x_0), admet un minimum $L_m > 0$. Nous prendrons $R' = k_2 L_m$, k_2 désignant une nouvelle

constante positive et telle que $k_1 + k_2 = k < 1$. L'intégrale I a un module borné supérieurement par $\frac{R}{1-k} H$, avec

$$H = \int_{x_1}^{x_0} \frac{x}{L} dx.$$

L'inégalité (1) $(4)_A$ est donc vérifiée si l'on a

$$R < \frac{k_1 (1-k) L_m}{H}.$$

La différence $I - I'$ a un module inférieur à $\frac{R h' k_1}{(1-k)^2} H$. L'inégalité $(7)_A$ est donc vérifiée si l'on a

$$R < \frac{h (1-k)^2 L_m}{H}.$$

Enfin, la fonction $F(x, X, \varepsilon^2, D_0)$ est holomorphe par rapport à X, ε^2 et D_0 si toutes les conditions précédentes sont remplies. Dès lors, les hypothèses de la note (A) sont toutes satisfaites et notre théorème est démontré.

On en conclut qu'il est possible de *développer* D *suivant les puissances de* ε^2 *et* D_0, pourvu que ces quantités soient respectivement inférieures aux rayons de convergence R et R'.

Si $a - x_0$ et $x_1 - a'$ sont finis, il en est de même de L_m et de H, donc de R et R'; la convergence est assurée, puisque ε^2 et D_0 sont infiniment petits.

Supposons maintenant $a - x_0$ infiniment petit d'ordre α par rapport à ε et D_0 infiniment petit d'ordre β; $x_1 - a'$ étant toujours fini. Soit r l'ordre à gauche de F. On voit que L_m et H sont d'ordres respectifs $r\alpha$ et $(1-r)\alpha$. Donc, R' et R sont d'ordres respectifs $r\alpha$ et $(2r-1)\alpha$. La convergence est assurée si l'on a

$$(11) \qquad r\alpha < \beta, \qquad \alpha < \frac{2}{2r-1} = r'.$$

On a des conditions analogues en supposant $x_1 - a'$ infiniment petit; r est alors l'ordre à droite de F', c'est-à-dire $r = 1$. Donc, L_m est d'ordre α, tandis que H est de l'ordre de $\log\varepsilon$. Donc, R' et R sont d'ordre α. Les conditions (11) subsistent.

Observons enfin que, d'après la remarque terminant la note (A), si l'on ne garde dans le développement de D que les termes ayant un degré $\leq n$ par rapport à ε^2 et $\leq p$ par rapport à D_0, l'erreur commise sera au plus de l'ordre du plus grand des deux nombres

$$L(x)\left(\frac{\varepsilon^2}{R}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad L(x)\left(\frac{D_0}{R'}\right)^{p+1}.$$

(1) Pour abréger l'écriture, nous convenons de distinguer les références relatives à l'une des Notes en mettant en indice la lettre correspondant à cette note.

11. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours t de l'arc M_0M (¹) est donné par l'une ou l'autre des deux formules équivalentes :

$$\varepsilon\omega t = \int_{M_0}^{M} \frac{dD}{x}, \tag{12}$$

$$\varepsilon\omega t = -\varepsilon^2 \int_{M_0}^{M} \frac{dx}{L+D}. \tag{13}$$

Comme $|D| < k_1 L(x)$, nous pouvons développer sous le signe $\int$ de la seconde intégrale suivant les puissances de ε^2 et D_0, puis intégrer terme à terme. Nous obtenons ainsi une série entière majorée par

$$\frac{1}{(1-k_1)\left(1-\frac{\varepsilon^2}{R}\right)\left(1-\frac{D_0}{R'}\right)} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{L(x)}.$$

Si on la limite comme on a limité le développement de D, on commet une erreur de l'ordre du produit de $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{L}$ par le plus grand des deux nombres $\left(\frac{\varepsilon^2}{R}\right)^{n+1}$ et $\left(\frac{D_0}{R'}\right)^{p+1}$.

II. — Partie centrale d'un arc de seconde espèce.

12. *Limites de la déviation.* — Appelons toujours F et F′ les points frontière de droite et de gauche, a et a' leurs abscisses respectives. Partons du point F avec la déviation D_0 d'ordre β. La déviation en un point quelconque n'est autre que la fonction $u = \lambda - y$ introduite au numéro 6. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$u\frac{du}{dx} = \lambda'(u - H), \tag{14}$$

en appelant λ' la dérivée $\frac{d\lambda}{dx}$ et posant

$$H = \varepsilon^2 \frac{x}{\lambda'}. \tag{15}$$

Nous allons chercher *une limite supérieure et une limite inférieure de* u quand x décroît de a à une valeur fixe $x_1 > a'$.

Appelons M et m le maximum et le minimum de H dans l'intervalle (x_1, a).

Supposons d'abord $u_0 = H_0$. Si u augmente, la dérivée $\frac{du}{dx}$ devient négative; donc, $H_0 < u < H$. Si u diminue, on voit de même que $H_0 > u > H$. Dans les deux cas, u reste constamment compris entre M et m.

Supposons maintenant $u_0 < H_0$. La dérivée $\frac{du}{dx}$ est d'abord négative; donc la

(¹) Nous prenons ce temps en valeur absolue, sans nous préoccuper du sens de parcours.

fonction u augmente tant qu'elle reste $< H$. Si elle atteint H, on est ramené au premier cas. On en conclut que la limite supérieure de u est toujours M; sa limite inférieure est le plus petit des deux nombres m et u_0.

Supposons enfin $u_0 > H_0$. La fonction u décroît tant qu'elle reste $> H$. Si elle atteint H, on est encore ramené au premier cas. Dès lors, sa limite inférieure est m et sa limite supérieure est le plus grand des deux nombres M et u_0.

Dans tous les cas, on peut dire que *la fonction u reste constamment comprise entre le plus grand des deux nombres u_0 et* M *et le plus petit des deux nombres u_0 et m.*

La fonction λ' est bornée supérieurement et inférieurement par des nombres > 0 dans tout l'intervalle (x_1, a). Donc, M et m sont d'ordre 2. On en conclut que *l'ordre de u est constamment compris entre* β *et* 2.

13. *Développement de la déviation en série asymptotique.* — Définissons les fonctions u_n par les formules

$$u_n = \frac{\varepsilon^2 x}{\lambda' - u'_{n-1}}, \qquad u_0 = 0; \tag{16}$$

où les accents indiquent toujours une dérivée par rapport à x. Si l'on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$, on a

$$v_{n+1} = \frac{\varepsilon^2 x v'_n}{(\lambda' - u'_n)(\lambda' - u'_{n-1})} \tag{17}$$

et

$$u_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n. \tag{18}$$

Je dis que l'on a, quel que soit n,

$$v_n = \varepsilon^{2n} V_n, \tag{19}$$

V_n désignant une fraction rationnelle en ε^2, qui reste finie pour $\varepsilon = 0$, quel que soit x dans l'intervalle (x_1, a).

Ceci est vrai pour $n = 1$, avec $V_1 = \frac{x}{\lambda'}$. Admettons qu'il en soit de même jusqu'au rang n. La formule (18) nous montre que $u'_n = \varepsilon^2 \varphi_n$, φ_n désignant encore une fraction rationnelle analogue à V_n. Dès lors, la formule (17) nous donne

$$V_{n+1} = \frac{x V'_n}{(\lambda' - \varepsilon^2 \varphi_n)(\lambda' - \varepsilon^2 \varphi_{n-1})},$$

ce qui prouve l'exactitude de la propriété au rang $n+1$.

14. *Étude de l'erreur.* — Soit $X_n = u - u_n$ l'*erreur commise en remplaçant u par* u_n. D'après (14) et (16), on a

$$X'_n = \lambda' - u'_n - \frac{\varepsilon^2 x}{u} = \frac{\varepsilon^2 x}{u_{n+1}} - \frac{\varepsilon^2 x}{u} = \varepsilon^2 x \frac{X_{n+1}}{u\, u_{n+1}},$$

ou, en remplaçant X_{n+1} par $X_n - \varphi_{n+1}$,

$$X_n' - \frac{\varepsilon^2 x}{u u_{n+1}} X_n = -\frac{\varepsilon^2 x \varphi_{n+1}}{u u_{n+1}}. \tag{20}$$

Posons

$$\varphi(x) = \int_x^a \frac{\varepsilon^2 x}{u u_{n+1}} dx. \tag{21}$$

La fonction u est toujours positive et il en est de même de u_{n+1}, si ε est assez petit. Dès lors, la fonction $\varphi(x)$ est positive et décroissante.

Ceci étant, appelons X_n^0 la valeur de X_n pour $x = a$; on a, en intégrant l'équation (20),

$$X_n = X_x^0 e^{-\varphi(x)} + e^{-\varphi(x)} \int_0^{\varphi(x)} \varphi_{n+1} e^{\varphi} d\varphi.$$

Soit N une limite supérieure de $|V_{n+1}|$. On déduit de la formule précédente

$$|X_n| < |X_n^0| e^{-\varphi(x)} + N\varepsilon^{2(n+1)}. \tag{22}$$

Cherchons une limite inférieure de $\varphi(x)$. D'après le n° 12, u est borné supérieurement, suivant que β est < 2 ou ≥ 2, par une quantité de la forme $M\varepsilon^\beta$ ou $M\varepsilon^2$, M désignant une constante positive. On a dès lors, d'après (21),

$$\varphi(x) > \frac{a^2 - x^2}{2MM'\varepsilon^\beta},$$

β devant être remplacé par 2 si $\beta > 2$.

Supposons que $a - x$ soit d'ordre $\alpha = \beta - m$, m désignant un nombre compris entre zéro et β. On en conclut que $\varphi(x)$ est supérieur à une quantité d'ordre $-m$. Dès lors, le premier terme du second membre de (22) est d'ordre exponentiel. Par suite, l'erreur X_n est d'ordre au moins égal à l'ordre de φ_{n+1}. On a donc la proposition suivante :

Théorème. — *Dès qu'on s'est écarté du point frontière* F, *vers la gauche, d'une quantité infiniment petite d'ordre inférieur à* β (*ou à* 2 *si* $\beta > 2$), *on peut calculer la déviation u par la série asymptotique*

$$u = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n + \ldots; \tag{23}$$

l'erreur commise en arrêtant cette série au terme de rang n est de l'ordre de φ_{n+1}.

15. *Accumulation des trajectoires.* — Considérons deux trajectoires dont les déviations en F sont infiniment petites. D'après ce qui précède, au bout d'un parcours infiniment petit vers la gauche, elles peuvent être calculées toutes deux par la série asymptotique (23). Par conséquent, *leur distance verticale est infiniment petite d'ordre infini.*

Ceci peut être précisé davantage au moyen du n° 6. A partir d'une valeur x_0

infiniment voisine de a, nous savons que les fonctions u et u' sont du second ordre. Elles sont donc bornées supérieurement par des quantités de la forme $M\varepsilon^2$ et $M'\varepsilon^2$. Dès lors, on a, d'après (7),

$$h > \frac{x_0^2 - x^2}{2MM'\varepsilon^2}.$$

Si $x_0 - x$ est d'ordre $2-m$, h est supérieur à une quantité d'ordre $-m$. Dès lors, *la distance verticale* η *des deux trajectoires est d'ordre exponentiel.* En particulier, si $x_0 - x$ est fini, cette distance est de l'ordre de $e^{-\frac{k}{\varepsilon^2}}$, k désignant une fonction de x qui augmente quand x décroît. On peut résumer ceci en disant que *toutes les trajectoires qui s'approchent de* (Γ) *viennent immédiatement s'accumuler dans un tube exponentiellement étroit et dont la largeur diminue constamment jusqu'à la rencontre avec* Oy.

16. *Voisinage du point frontière de gauche.* — Supposons maintenant qu'on suive la trajectoire jusqu'à une distance ξ du point frontière F′ qui soit infiniment petite d'ordre α. Cherchons *dans quelles conditions on peut toujours utiliser la série asymptotique* (23).

Soit r l'ordre à droite de F′. *Si* $r=1$, rien n'est à changer dans tout ce qui précède et *la formule* (23) *est applicable jusqu'en* F′. Supposons maintenant $r>1$ et introduisons la variable

$$z = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{2r-1}}. \tag{24}$$

Je dis que l'on peut écrire

$$v_n = \xi^r z^n V_n(z, \xi), \tag{25}$$

V_n désignant une fonction de z et ξ, rationnelle par rapport à z, holomorphe par rapport à z et ξ au voisinage de $z=\xi=0$ et non nulle pour $z=\xi=0$.

La dérivée λ' est de la forme $F\xi^{r-1}$, F désignant une fonction holomorphe et non infiniment petite de ξ au voisinage de $\xi=0$. Dès lors, on a, d'après (16),

$$v_1 = u_1 = \frac{\varepsilon^2 x}{F\xi^{r-1}} = \xi^r z \frac{x}{F},$$

ce qui est bien de la forme (25).

Admettons maintenant l'exactitude de la formule (25) jusqu'au rang n. En tenant compte de ce que $\frac{dz}{d\xi} = -(2r-1)\frac{z}{\xi}$, on a, pour $i \leq n$,

$$v_i' = r\xi^{r-1} z^i V_i - i(2r-1)\xi^{r-1} z^i V_i + \xi^{r-1} z^i \left[-(2r-1) z \frac{\partial V_i}{\partial z} + \xi \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \right]$$

ou

$$v_i' = \xi^{r-1} z^i W_i,$$

avec

$$W_i = V_i[r - i(2r-1)] - (2r-1) z \frac{\partial V_i}{\partial z} + \xi \frac{\partial V_i}{\partial \xi}.$$

On voit que W_i est une fonction de même nature que la fonction V_i. Elle ne s'annule pas pour $z = \xi = 0$, car le coefficient de V_i est $\leq r - (2r-1) = 1 - r < 0$.

En dérivant (18), on en déduit

$$u_i' = \xi^{r-1} z \varphi_i,$$

φ_i désignant encore une fonction de même nature que les V_i. En portant dans (17), il vient

$$v_{n+1} = \xi^r z^{n+1} \frac{x W_n}{(F - z\varphi_n)(F - z\varphi_{n-1})},$$

ce qui justifie la formule (25) au rang $n+1$.

Dans ces conditions, *pour que la série asymptotique* (23) *soit toujours utilisable*, il faut et il suffit que z soit infiniment petit d'ordre non nul. Si l'on se reporte à la formule (24), on voit qu'*il est nécessaire et suffisant que l'ordre* α *de* ξ *soit inférieur à* $r' = \frac{2}{2r-1}$.

17. Considérons deux trajectoires issues des points M_0 et M_0', d'abscisse commune $a' + \xi_0$, ξ_0 étant d'ordre $\alpha < r'$. Supposons que les déviations initiales u_0 et u_0' soient toutes deux d'ordre $\beta = 2 - \alpha(r-1)$. Je dis que *ces deux trajectoires ont un écart vertical exponentiellement petit* pour $\xi = k\xi_0$, si k désigne un facteur compris entre zéro et un. En effet, d'après le n° 12, u et u' sont bornés supérieurement, dans l'intervalle $(k\xi_0, \xi_0)$, par des quantités de la forme $M\varepsilon^\beta$ et $M'\varepsilon^\beta$. Dès lors, pour $\xi = k\xi_0$, on a, d'après (7),

$$h > \varepsilon^{2-2\beta} \frac{a'\xi_0(1-k)}{MM'}.$$

Le second membre est d'ordre $2 - 2\beta + \alpha = \alpha(2r-1) - 2 < 0$. Donc, h est infiniment grand d'ordre non nul, ce qui démontre la propriété.

18. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours de l'arc M_0M est donné par la formule

$$\varepsilon\omega t = -\int_{M_0}^{M} \frac{d\lambda}{x} + \frac{u}{x} - \frac{u_0}{x_0} + J \tag{26}$$

avec

$$J = \int_{M_0}^{M} \frac{u}{x^2}\, dx. \tag{27}$$

Remplaçons u par le développement (23), limité au terme de rang q. Si la distance ξ de M à F' est finie, l'erreur commise est d'ordre $2(q+1)$. Il en est de même jusqu'en F' si $r = 1$. Si $r > 1$ et si ξ est d'ordre $\alpha < r'$, l'erreur est d'ordre $2(q+1) - \alpha[(q+1)(2r-1) - r]$. En choisissant α assez petit, on peut rendre cet ordre arbitrairement voisin de $2(q+1)$.

III. — Voisinage d'un point frontière.

19. *Changement de variables.* — Soit un point frontière $F(a, b)$. Considérons un point M_0 de la trajectoire, de coordonnées (x_0, y_0) et tel que $|x_0 - a| < \rho$, ρ ayant la signification indiquée au n° 7. Prenons maintenant un autre point M_1 de la trajectoire, dont l'abscisse x_1 soit comprise entre $a - \rho$ et x_0. Proposons-nous de calculer l'ordonnée y de tout point M de l'arc M_0M_1.

Faisons le changement de variables

$$\xi = \theta s, \qquad y - b = \sigma'' A_0 \theta^r z, \tag{28}$$

en convenant que $\sigma'' = +1$ ou -1 suivant que F appartient à l'arc supérieur ou à l'arc inférieur (¹). Quant à θ, c'est un monome en ε à exposant positif, dont la valeur sera précisée dans chaque cas particulier.

L'équation différentielle de la trajectoire devient, avec les notations du n° 7,

$$\frac{dz}{ds}(z - \sigma'\sigma'' s^r - \sigma'\sigma'' B\theta s^{r+1}) = -\theta'\left(\sigma + \frac{\theta s}{a}\right), \tag{29}$$

en posant

$$\theta' = \frac{\varepsilon^2 a}{A_0^2 \theta^{2r-1}}. \tag{30}$$

De plus, pour $s = s_0 = \frac{\xi_0}{\theta}$, z doit prendre la valeur $z_0 = \frac{y_0 - b}{\sigma'' A_0 \theta^r}$. Enfin, s varie entre s_0 et $s_1 = \frac{\xi_1}{\theta}$. Dans ce qui va suivre, nous considérerons s_0 et s_1 comme des nombres *fixes*, de sorte que ξ_0 et ξ_1 dépendront de θ.

Nous aurons deux cas à distinguer.

20. Cas I : θ' *est infiniment petit.* — Nous choisirons θ de telle manière que z_0 ait une limite finie Z_0 pour $\varepsilon = 0$. Posons alors $z_0 = Z_0 + \zeta$ et faisons le nouveau changement de variable

$$z = Z_0 + \zeta + Y. \tag{31}$$

L'équation (29) devient

$$\frac{dY}{ds} = \frac{\theta'\left(1 + \sigma\frac{\theta s}{a}\right)}{W + V}, \tag{32}$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$W = \sigma(-Z_0 + \sigma'\sigma'' s^r), \qquad -\sigma V = Y + \zeta - \sigma'\sigma'' B\theta s^{r+1}. \tag{33}$$

De plus, Y doit s'annuler pour $s = s_0$.

(¹) Sauf dans le cas du n° 32.

Considérons θ, θ' et ζ comme trois variables complexes indépendantes et appliquons la note (A). Nous posons

$$|\theta| < R, \qquad |\theta'| < R', \qquad |\zeta| < R''.$$

De plus, nous supposons que la fonction W est positive dans tout l'intervalle (s_0, s_1).

Prenons $\psi(s) = k_1 W$, k_1 désignant une constante comprise entre zéro et *un*. Supposons en outre que l'on ait

$$(34) \qquad R|s| < \rho, \qquad RM|s^{r+1}| < k_2 W, \qquad R'' < k_3 W, \qquad k_1 + k_2 + k_3 = k < 1,$$

ρ et M ayant la signification indiquée au n° 7. On en déduit $|V| < kW$ et l'intégrale I a un module inférieur à $\frac{R'\left(1+\frac{\rho}{a}\right)}{1-k} J$, en appelant J la valeur absolue de l'intégrale $\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{W}$. L'inégalité $(4)_A$ est vérifiée si l'on a

$$(35) \qquad R' < \frac{K(1-k)k_1}{1+\frac{\rho}{a}},$$

en appelant K une borne inférieure du rapport $\frac{W}{J}$.

On a maintenant

$$|I - I'| < \frac{R'\left(1+\frac{\rho}{a}\right) h' k_1 J}{(1-k)^2}$$

et l'inégalité $(7)_A$ est vérifiée si l'on a

$$(36) \qquad R' < \frac{K h (1-k)^2}{1+\frac{\rho}{a}}.$$

Comme le second membre de (32) est holomorphe par rapport à θ, θ', ζ et Y tant que $|V| < kW$, toutes les conditions de la note (A) sont remplies si l'on a à la fois (34), (35) et (36). Dès lors, Y est une fonction holomorphe de θ, θ' et ζ et *peut être développé suivant les puissances de ces variables*

$$(37) \qquad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \theta'^n \theta^p \zeta^q Y_{npq}(s).$$

Si on limite le développement par les conditions $n \leqq n_1$, $p \leqq p_1$, $q \leqq q_1$, l'erreur commise est de l'ordre du plus grand des trois nombres

$$W\left(\frac{\theta'}{R'}\right)^{n_1+1}, \qquad W\left(\frac{\theta}{R}\right)^{p_1+1}, \qquad W\left(\frac{\zeta}{R''}\right)^{q_1+1}.$$

21. Cas II : $\theta' = 1$. — D'après (30), on a donc

$$\theta = \left(\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{A_0}\right)^{r'}, \qquad r' = \frac{2}{2r-1}. \tag{38}$$

Si ε tend vers zéro, l'équation (29) devient à la limite

$$W\frac{dZ}{ds} = 1, \tag{39}$$

en posant

$$W = -\sigma(Z - \sigma'\sigma'' s^{r'}). \tag{40}$$

L'équation (39) sera appelée *équation différentielle de raccordement* et nous appellerons *fonction de raccordement* une solution particulière de cette équation, qui sera précisée ultérieurement dans chaque cas et qui sera telle que la fonction W soit positive quand s reste compris entre s_0 et s_1. Nous poserons

$$\varphi = \int \frac{ds}{W^2}, \tag{41}$$

la constante d'intégration restant pour le moment indéterminée.

Soit Z_0 la valeur de la fonction de raccordement pour $s = s_0$ et ζ la différence $z_0 - Z_0$. Faisons le changement de variable

$$z = Z + \zeta + Ye^{\sigma\varphi}. \tag{42}$$

L'équation (29) devient

$$\frac{dY}{ds} = F(s, Y, \theta, \zeta) = \sigma\frac{-VY + We^{-\sigma\varphi}\left(\theta\frac{s}{a}W + \zeta - \sigma'\sigma''B\theta s^{r'+1}\right)}{W^2(W+V)}, \tag{43}$$

avec

$$-\sigma V = Ye^{\sigma\varphi} + \zeta - \sigma'\sigma''B\theta s^{r'+1}. \tag{44}$$

De plus, Y doit s'annuler pour $s = s_0$.

Ceci étant, considérons θ et ζ comme deux variables complexes indépendantes, de modules respectivement inférieurs à R et R' et appliquons la note (A), en prenant

$$\psi(s) = k_1 We^{\sigma\varphi}.$$

Supposons que l'on ait, pour toute valeur de s comprise entre s_0 et s_1,

$$R|s| < \rho, \qquad RM|s^{r'+1}| < k_2 W, \qquad R' < k_3 W, \qquad k_1 + k_2 + k_3 = k < 1. \tag{45}$$

On en déduit $|V| < kW$ et l'on voit que l'intégrale I a un module inférieur à

$$\frac{kk_1 + R\frac{S}{a} + k - k_1}{1-k} J,$$

en appelant J la valeur absolue de l'intégrale $\int_{s_0}^{s} \frac{e^{-\sigma\zeta}}{W} ds$ et S le plus grand des deux nombres $|s_0|$ et $|s_1|$. L'inégalité $(4)_A$ est vérifiée si l'on a

$$R < a \frac{k_1(1-k)(1+K)-k}{S}, \tag{46}$$

en appelant K une borne inférieure du rapport $\frac{We^{-\sigma\zeta}}{J}$.

En formant l'expression de $I - I'$, on voit facilement que son module est inférieur à

$$h' k_1 \frac{2k + k^2 + R\frac{S}{a}}{(1-k)^2} J$$

et l'inégalité $(7)_A$ est vérifiée si l'on a

$$R < a \frac{h(1-k)^2 K - 2k - k^2}{S}. \tag{47}$$

Les inégalités (46) et (47) ne sont possibles que si leurs seconds membres sont positifs. Cela impose certaines conditions aux nombres k, k_1, k_2, k_3 et h. On vérifie aisément qu'elles sont toutes remplies si l'on prend par exemple

$$k = \frac{K}{3(1+K)}, \qquad k_1 = k\frac{3+K}{3+2K}, \qquad k_2 = k_3 = \frac{K^2}{6(1+K)(3+2K)}, \qquad h = \frac{3}{4}.$$

Les inégalités (46) et (47) se réduisent alors à

$$R < \frac{aK^2}{9S(1+K)}. \tag{48}$$

Les rayons de convergence R et R' étant choisis de manière à remplir les conditions précédentes, *on peut développer* Y sous la forme

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \theta^n \zeta^p Y_{np}(s) \qquad (n+p>0). \tag{49}$$

Si on limite la série par $n \leq n_1$, $p \leq p_1$, l'erreur commise est de l'ordre du plus grand des deux nombres

$$We^{-\sigma\zeta}\left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}, \qquad We^{-\sigma\zeta}\left(\frac{\zeta}{R'}\right)^{p_1+1}.$$

22. *Calcul des coefficients.* — Dans le cas I, posons

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \theta'^n Y_n, \qquad Y_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \theta^p \zeta^q Y_{npq}. \tag{50}$$

Substituons dans l'équation (32), écrite sous la forme

$$U\frac{dY}{ds}=\theta'\left(1+\sigma\theta\frac{s}{a}\right)-Y\frac{dY}{ds},\qquad U=W+\zeta-\sigma'\sigma''B\theta s^{r+1}.$$

On a d'abord

$$Y_1=\int_{s_0}^{s}\frac{1+\sigma\theta\frac{s}{a}}{U}\,ds. \tag{51}$$

Puis,

$$Y_n=-\int_{s_0}^{s}F_n\frac{ds}{U},\qquad F_n=\sum_{i=1}^{n-1}Y_i\frac{dY_{n-i}}{ds}. \tag{52}$$

En développant ensuite suivant les puissances de θ, ζ, on obtient les Y_{npq}.

Dans le cas où $r=1$, on peut aussi développer Y suivant les puissances de θ seulement. Chaque coefficient s'obtient par l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut ensuite le développer suivant les puissances de θ' et ζ. Nous emploierons cette méthode particulière au n° 47.

Dans le cas II, nous écrivons l'équation (43) sous la forme

$$W^2\frac{dY}{ds}=V\left(-\sigma Y-W^2\frac{dY}{ds}\right)+\sigma We^{-\sigma\tau}\left(\theta\frac{s}{a}W+\zeta-\sigma'\sigma''B\theta s^{r+1}\right). \tag{53}$$

Posant (49), on a

$$V=\sum\sum\theta^n\zeta^p V_{np},$$

avec

$$V_{01}=-\sigma(1+Y_{01}e^{\sigma\tau}),\qquad V_{n0}=-\sigma Y_{n0}e^{\sigma\tau}+\sigma\sigma'\sigma''b_{n-1}s^{n+r},\qquad V_{np}=-\sigma Y_{np}e^{\sigma\tau}. \tag{54}$$

Substituant dans (53), on obtient, par identification,

$$Y_{01}=e^{-\sigma\tau_0}-e^{-\sigma\tau},\qquad V_{01}=-\sigma e^{\sigma(\tau-\tau_0)}; \tag{55}$$

$$Y_{10}=\sigma\int_{s_0}^{s}e^{-\sigma\tau}\frac{s}{W^2}\left(\frac{W}{a}-\sigma'\sigma''b_0s^r\right)ds, \tag{56}$$

$$\frac{dY_{n0}}{ds}=-\sigma\sigma'\sigma''b_{n-1}e^{-\sigma\tau}\frac{s^{r+n}}{W^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{V_{n-i\,0}}{W}\left(\sigma\frac{Y_{i0}}{W^2}+\frac{dY_{i0}}{ds}\right), \tag{57}$$

$$\frac{dY_{np}}{ds}=-\sum\sum\frac{V_{ij}}{W}\left(\sigma\frac{Y_{i'j'}}{W^2}+\frac{dY_{i'j'}}{ds}\right)\qquad(i+i'=n;\ j+j'=p). \tag{58}$$

Comme les sommes $i+j$ et $i'+j'$ sont ≥ 1, elles sont $\leq n+p-1$. On voit donc qu'on peut calculer de proche en proche tous les coefficients Y_{np}.

23. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours entre M et M_0 est donné par

l'une ou l'autre des deux formules équivalentes

$$\varepsilon\omega t = A_0\theta^r \int_{s_0}^{s} \frac{\frac{dz}{ds}}{\alpha + \sigma\theta s}\, ds, \tag{59}$$

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{\alpha}\theta'\theta^r \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{W + V}. \tag{60}$$

La fonction sous le signe $\int$ de la seconde intégrale est majorée par

$$\frac{1}{(1-k)\,W\left(1-\frac{\theta}{R}\right)\left(1-\frac{\theta'}{R'}\right)\left(1-\frac{\zeta}{R''}\right)}.$$

On peut donc développer suivant les puissances θ, θ', ζ et intégrer terme à terme. Si le développement est limité comme celui de Y, l'erreur commise sur l'intégrale est de l'ordre du produit de $\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{W}$ par le plus grand des trois nombres $\left(\frac{\theta'}{R'}\right)^{n_1+1}$, $\left(\frac{\theta}{R}\right)^{p_1+1}$, $\left(\frac{\zeta}{R''}\right)^{q_1+1}$. Bien entendu, dans le cas II, $\theta' = 1$; on a une série en θ, ζ seulement et le second des trois nombres précédents n'existe pas; de plus, $\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{W} = Z - Z_0$.

CHAPITRE II.

ARC SUPÉRIEUR.

24. *Départ du point terminal.* — Avec les notations du n° 19, nous prenons M_0 en E; de sorte que $z_0 = Z_0 = \zeta = 0$. De plus, $r = 1$, $\sigma = \sigma' = -1$, $\sigma'' = 1$. Nous nous mettons dans le cas II (n° 21). L'équation (39) s'écrit

$$\frac{ds}{dZ} = s + Z. \tag{61}$$

La *fonction de raccordement* est définie par l'équation

$$s = e^Z - Z - 1. \tag{62}$$

Elle croit de 0 à $+\infty$ en même temps que s. La fonction $W = Z + s = e^Z - 1$ est positive pour $s > 0$. La formule (41) nous donne

$$e^Z - 1 - e^{-Z} = We^{-Z}, \qquad J = We^Z - s < We^Z. \tag{63}$$

On en conclut que l'on peut prendre $K = 1$. D'autre part, le rapport $\frac{W}{s^2}$ est $> \frac{1}{s}$. Comme $S = s_1$, l'examen des inégalités (45) et (48) nous montre que l'on peut

trouver un rayon de convergence R de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$. Dès lors, la convergence est assurée si $\theta s_1 = \xi_1$ est inférieur à une certaine limite finie. Autrement dit, nous pouvons, par la présente méthode, *atteindre un point* M_1 *situé à une distance finie du point terminal.*

D'autre part, nous pouvons appliquer la méthode du n° 10 à partir de M_0 si ξ_0 est d'ordre α inférieur à 2 et à β. Nous pouvons prendre M_0 en M_1 par exemple ou en tout autre point situé entre M_1 et E, pourvu qu'il ne soit pas trop près de E. Dès lors, *le raccordement est possible*, puisque les zones d'application des deux méthodes se chevauchent.

25. *Développement des* Y_n *pour s très grand.* — Comme $\zeta = 0$, la série (49) est une série simple en θ, dont les coefficients Y_n se calculent suivant la méthode du n° 22 (cas II), en ne gardant que les coefficients Y_{n0}. Nous allons montrer qu'on peut calculer chaque Y_n par un certain développement en série, pour les grandes valeurs de s.

Posons

$$u = \frac{1}{s}, \qquad v = \frac{\log s}{s}, \qquad \frac{Z}{s} = v + w.$$

L'équation (62) s'écrit

$$w = u \log(1 + u + v + w).$$

On en conclut que w est fonction holomorphe de u et v au voisinage de $u = v = 0$. On peut écrire par exemple, en appliquant la formule de Lagrange,

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} [\log^n(1 + u + v + w)]_{w=0}. \tag{64}$$

On en déduit que $\frac{s}{W} = \frac{1}{1 + v + w}$ et $e^{\gamma} = \frac{1 + v + w}{1 + u + v + w}$ sont aussi holomorphes en u et v. Avec la terminologie de la note (C), on conclut que les fonctions ci-dessus sont, pour s très grand, développables en série (C) d'ordre nul.

Je dis maintenant que $\frac{dY_n}{ds}$ est, pour s très grand, une série (C) d'ordre $n - 1$. Ceci est déjà vrai pour $n = 1$, d'après (56). Admettons qu'il en soit de même jusqu'au rang $n - 1$. D'après la note (C), Y_i est une série (C) d'ordre i pour $i \leq n - 1$. D'après (54), on en conclut que V_i est une série (C) d'ordre $i + 1$. Si l'on se reporte maintenant à (57), on voit immédiatement que la propriété annoncée est exacte au rang n.

26. *Développement asymptotique de la déviation au voisinage du point terminal.* — D'après (28) et (42), on a

$$D = \Lambda_0 \theta \left[\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n H_n(s) \right], \qquad H_0 = Z, \qquad H_n = Y_n e^{-\gamma}. \tag{65}$$

Supposons que ξ soit d'ordre $\alpha < 2$; s est d'ordre $\alpha - 2$, donc infiniment grand. Nous pouvons remplacer chaque coefficient H_n par son développement en série (C). En ordonnant $\frac{H_n}{s^n}$ par groupes homogènes en u et v, le crochet de (65) s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \sum_{p=-n}^{+\infty} \frac{H_{np}(\log s)}{s^p},$$

où H_{np} représente un polynome de degré $n+p$ en $\log s$. Cette série double est convergente si l'on respecte l'ordre des sommations. Mais, *nous ne pouvons pas affirmer qu'elle soit absolument convergente*, car, si H_n est fonction holomorphe de u et v au voisinage de $u = v = 0$, il n'en est pas de même du crochet, dont la convergence par rapport à θ n'a été démontrée que pour $s < s_1$. Nous devons dès lors nous contenter de *développements limités*.

Si $n \leqq n_1$, l'erreur commise sur D est (n° 21) de l'ordre de $\theta W e^{v} \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}$, donc de $\theta s \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}$. Comme $\frac{1}{R}$ est de l'ordre de s_1, cette erreur est de l'ordre de $\xi \xi_1^{n_1+1}$, donc d'ordre $\alpha(n_1+2)$, si ξ_1 est, comme ξ, d'ordre α.

Limitons maintenant le développement de H_n par la condition $p \leqq q - n - 1$. L'erreur commise sur $\theta^n H_n$ est de l'ordre de $\frac{\theta^n}{s^{q-n}}$, donc d'ordre

$$n\alpha + q(2-\alpha) \geqq 2q - q\alpha.$$

L'erreur totale sur D est d'ordre $2(q+1) - q\alpha$ si $n_1 + 2 > \frac{2(q+1) - q\alpha}{\alpha}$. Cet ordre est infiniment voisin de $2(q+1)$ si α est infiniment petit, ce qui est permis (n° 24); mais alors n_1 est infiniment grand.

Nos développements étant limités de la sorte, nous pouvons les ordonner arbitrairement. Remplaçons s par $\frac{\xi}{\theta}$; nous obtenons

$$D = A_0 \sum_{n=0}^{n_1} \sum_{p=-n}^{q-n-1} \theta^{n+1-p} \xi^{-p} H_{np}(\log s)$$

ou, en posant $n + p + 1 = m$,

$$D = A_0 \sum_{m=1}^{q} \sum_{p=m-1-n_1}^{m-1} \theta^m \xi^{-p} H_{np}(\log s) \qquad (n = m - p - 1),$$

soit

$$D = A_0 \sum_{m=1}^{q} \theta^m \Delta_m(\xi), \tag{66}$$

avec

$$\Delta_m(\xi) = \sum_{p=m-1-n_1}^{m-1} \xi^{-p} H_{np}(\log s) \qquad (n = m - p - 1). \tag{67}$$

Le coefficient $\Delta_m(\xi)$ apparaît donc comme un développement limité procédant suivant des puissances de ξ, dont les exposants varient de $1-m$ à $1-m+n_1$ et dont les coefficients sont des polynomes en $\log s = \log\xi - \log\theta$. Ce développement est poussé d'autant plus loin que n_1 est plus grand, donc que α est plus petit; si α tendait vers zéro, il deviendrait à la limite une véritable série.

27. *Prolongement de l'arc.* — Pour calculer la déviation D en un point M situé à distance finie du point terminal, nous pouvons maintenant utiliser le développement de D suivant les puissances de ε^2 et de D_0 (n° 10), en remplaçant ε^2 par $\frac{A_0^2}{a}\theta$. Gardons seulement, dans ce développement, les termes dont le degré par rapport à l'ensemble des deux variables θ et D_0 est $\leq q$. Les rayons de convergence R et R′ sont d'ordre α; donc, $\frac{\theta}{R}$ et $\frac{D_0}{R'}$ sont d'ordre $2-\alpha$. Si M est à distance finie du point terminal, $L(x)$ est fini. Dès lors, l'erreur commise est d'ordre $(q+1)(2-\alpha)$; cet ordre est infiniment voisin de $2(q+1)$ si α est infiniment petit.

Dans ce développement limité, remplaçons D_0 par le développement (66), où l'on a remplacé ξ par ξ_0. Puis, ordonnons par rapport à θ; nous obtenon un développement de la forme

$$D = A_0 \sum_{m=1}^{q} \theta^m D_m(\xi_0), \tag{68}$$

dont les coefficients ne doivent plus garder trace de la variable intermédiaire ξ_0. D'autre part, ce développement doit coïncider avec (66) si ξ est d'ordre α. Par conséquent, $\Delta_m(\xi)$ *constitue un développement limité de la fonction* $D_m(\xi)$. Cette remarque va nous permettre de *calculer exactement cette dernière.*

Substituons (68) dans l'équation différentielle (10), qui s'écrit

$$\frac{dD}{d\xi}(D+\xi) = \frac{A_0^2}{a}\theta(a-\xi). \tag{69}$$

En identifiant, on peut calculer de proche en proche tous les coefficients $D_m(\xi)$ par des intégrales indéfinies, dont chacune introduit une constante inconnue. Appliquons la méthode de la note (E) à chacune de ces intégrales. *Le noyau de* $D_m(\xi)$ *doit être identique à celui de* $\Delta_m(\xi)$, et cela détermine la constante cherchée.

D'après (67), le noyau de $\Delta_m(\xi)$ est $H_{m-1,0}(\log s)$; c'est un polynome de degré $m-1$ en $\log s$, qui, avec la terminologie de la note (C), constitue le *noyau de la fonction* $H_{m-1}(s)$. En définitive, la fonction $D_m(\xi)$ se présente sous la forme suivante; elle comprend :

1° *un polynome en* $\frac{1}{\xi}$, *sans terme constant et dont les coefficients sont des polynomes en* $\log\xi$;

2° *le noyau* $N(H_{m-1})$, *polynome de degré* $m-1$ *en* $\log s = \log\xi - \log\theta$;

3° *une intégrale définie prise de* 0 *à* ξ *et qui est un polynome en* $\log\xi$, *à coefficients holomorphes et s'annulant avec* ξ.

Le développement (68) est une *série asymptotique*, puisque l'erreur est de l'ordre du premier terme négligé. Il est *valable jusqu'au sommet*, mais *pas à partir du point terminal.*

28. *Calcul du temps.* — Nous commençons par employer la formule (59), en y remplaçant z par le développement limité précédemment calculé, soit

$$\varepsilon\omega t = A_0\theta \int_0^s \frac{\sum_{n=0}^{\eta} \theta^n H'_n(s)}{\alpha - \beta s}\, ds.$$

Nous développons sous le signe $\int$ et intégrons terme à terme; nous obtenons ainsi un développement limité de la forme

$$\varepsilon\omega t = A_0 \sum_{n=1}^{n_1} \theta^n \Theta_n(s), \tag{70}$$

au moyen duquel nous pouvons calculer le temps de parcours entre E et le point M_0. Nous employons ensuite la formule (12), en y remplaçant D par le développement limité (68). Nous calculons ainsi le temps de parcours entre M_0 et M. En additionnant, nous avons le temps de parcours entre E et M et, bien entendu, la variable intermédiaire s_0 ou ξ_0 doit disparaître. Toutes ces opérations sont légitimes, en vertu des discussions d'erreur faites aux n^os^ 11, 23 et 27.

Les formules (12) et (68) nous montrent que le temps total est donné par un développement limité de la forme

$$\varepsilon\omega t = A_0 \sum_{m=1}^{\eta} \theta^m T_m(\xi), \tag{71}$$

avec

$$T_m(\xi) = \int \frac{D'_m(\xi)}{x}\, d\xi.$$

L'intégrale indéfinie ci-dessus comporte une constante inconnue, que l'on détermine en remarquant que *les formules* (70) *et* (71) *sont simultanément applicables*, si ξ est assez petit. La fonction $\Theta_n(s)$ peut être développée en série (C); si l'on y remplace s par $\frac{\xi}{\theta}$ et que l'on ordonne (70) suivant les puissances de θ, le coefficient de θ^m est un développement limité de la fonction $T_m(\xi)$. On a dès

lors, en égalant les noyaux,

$$N(T_m) = N(\Theta_m),$$

ce qui détermine la constante cherchée.

CHAPITRE III.

ARC DE SECONDE ESPÈCE.

29. *Départ du point frontière.* — Au point frontière, la déviation est nulle s'il s'agit du point terminal; sinon elle est d'ordre β compris (n° 45) entre 1 et 2.

S'il ne s'agissait que de calculer la déviation au sommet inférieur, nous pourrions nous dispenser d'effectuer le raccordement avec l'arc ultérieur (n° 15). Mais nous sommes obligés de le faire pour le calcul du temps.

Appliquons la méthode du n° 19, avec $r = 1$, $\sigma = \sigma' = \sigma'' = -1$, $s_0 = 0$. Si l'on part du point terminal, $D_0 = 0$; on applique la méthode du n° 21. Dans le cas contraire, l'ordre β de D_0 est < 2. Si l'on veut que z_0 soit fini, il faut appliquer la méthode du n° 20. Mais, la fonction W définie par (33) devient négative pour les grandes valeurs de s et le raccordement est impossible. Nous sommes dès lors obligés d'appliquer encore la méthode du n° 21. Mais z_0 est alors d'ordre $\beta - 2 < 0$, donc infiniment grand et en outre fonction de ε. On n'a plus aucun intérêt à introduire la variable ζ. Nous prendrons simplement $Z_0 = z_0$, de sorte que, dans les deux cas, $\zeta = 0$.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$Z - Z_0 = X, \qquad Z_0 - 1 = C.$$

Nous avons, d'après (40), $W = Z - s$. L'équation (39) est linéaire par rapport à s. La *fonction de raccordement* est définie par

$$s = X + C - Ce^{-X}. \tag{72}$$

La fonction $W = 1 + Ce^{-X}$ est positive quand $\beta < 2$, car C est infiniment grand positif, comme Z_0. Si l'on part du point terminal, $C = -1$, $W = 1 - e^{-X}$ a le signe de X. Mais, X devient nécessairement positif, le cas où X devient négatif correspondant à l'arc supérieur (n° 24). Dans tous les cas, *la fonction* W *est constamment positive*. Donc X croit constamment avec s.

Dans le cas $\beta < 2$, la formule (72) montre que dès que X a une valeur finie, s est asymptotique à C, donc à Z_0, donc d'ordre $\beta - 2$, donc infiniment grand. Si X est infiniment grand, s, asymptotique à $X + C$, est d'ordre $\leq \beta - 2$.

On peut prendre

$$e^{\tau} = e^{X} + C = We^{X}, \qquad J = \int_0^X e^{\tau}\, dX = e^{X} - 1 + CX. \tag{73}$$

Je dis que, pour toutes les valeurs positives de s, la différence $\Delta = We^{\varphi} - KJ$ est toujours positive si l'on prend K assez petit. La dérivée $\frac{d\Delta}{ds}$ a le signe de $1 - K - Ce^{-X}$. Dans le cas du point terminal, $C = -1$; on peut prendre $K = 1$, car Δ croît en partant de zéro. Dans l'autre cas, le minimum de Δ est atteint pour

$$e^X = \frac{C}{1-K}, \qquad X = \log C - \log(1-K), \qquad W = 2 - K.$$

Si l'on suppose K infiniment petit, ce minimum est asymptotique à $4C - KC\log Z_0$. En prenant $K = \frac{1}{\log Z_0}$, la propriété est assurée.

D'autre part, pour $0 < s < s_1$, $\frac{W}{s^2}$ a un minimum asymptotique à $\frac{1}{s_1^2}$. On en conclut que R est de l'ordre de $\frac{K^2}{s_1^2}$. Si ξ_1 est d'ordre α, $\frac{1}{s_1}$ est d'ordre $2-\alpha$, R est d'ordre $4-2\alpha$; la condition $\theta < R$ est assurée si $2 > 4 - 2\alpha$, soit $\alpha > 1$.

En définitive, *nous pouvons calculer un développement en série de la déviation jusqu'au point* M_1 *dont la distance au point frontière est d'ordre* α *compris entre* 1 *et* β *ou* 2. Comme, à partir de ce point, nous pouvons utiliser la série (23), *le raccordement est possible.*

30. *Calcul du développement.* — Au lieu de calculer la fonction Y, il est un peu plus avantageux, dans le présent cas, de calculer la fonction U définie par

$$(74) \qquad u = A_0\theta(W + Ue^{-\varphi}) \qquad \text{ou} \qquad U = Y - B\theta s^2 e^{\varphi} = Ve^{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \theta^n.$$

En utilisant les formules du n° 22 ou bien en formant l'équation différentielle que vérifie U, on obtient les formules suivantes :

$$(75) \qquad \frac{dU_1}{dX} = -Ws\left(\frac{1}{a} + 2b_0 W\right)e^X,$$

$$(76) \qquad \frac{dU_n}{dX} = -(n+1)b_{n-1}s^n W^2 e^X + \sum_{i=1}^{n-1} U_{n-i}\left[-(i+1)b_{i-1}s^i + \frac{e^{-X}}{W^2}\left(\frac{U_i}{W} - \frac{dU_i}{dX}\right)\right].$$

En intégrant de 0 à X, on peut calculer de proche en proche tous les U_n.

Nous allons établir maintenant une propriété de ces fonctions. Je dis que

$$(77) \qquad \frac{dU_n}{dX} = e^X P_n(s) + R_n(X, C),$$

$P_n(s)$ désignant un polynome de degré n, à coefficients constants et $R_n(X, C)$ une fonction d'ordre fini pour X infiniment grand.

Si cette propriété est exacte, on en déduit d'abord

$$(78) \qquad U_n = e^X Q_n(s) + S_n(X, C),$$

avec

$$Q_n = P_n(s) - P_n'(s) + \ldots; \qquad S_n \text{ d'ordre fini.}$$

On le voit en intégrant par parties le produit $e^X P_n(s)$ et remarquant que

$$\frac{d[f(s)]}{dX} = f'(s)W = f'(s) + f'(s)Ce^{-X}.$$

D'après (75), la formule (77) est exacte pour $n = 1$. Si elle l'est jusqu'au rang $n-1$, la formule (76) montre qu'elle l'est au rang n.

On pourrait tirer de là un développement asymptotique de la déviation et contrôler le résultat par la formule (23). Mais, nous avons seulement besoin de calculer le temps de parcours.

31. *Calcul du temps.* — Nous employons la formule (26) et devons donc simplement *calculer l'intégrale* J. Au départ, nous devons remplacer u par la formule (74). Nous pouvons ensuite utiliser le développement (23), que nous ordonnons au préalable suivant les puissances de ε^2 :

$$u = \sum_{p=1}^{q} \varepsilon^{2p} R_p(x). \tag{79}$$

En limitant le développement de U (n° 30) à un rang n_1 suffisamment élevé, l'erreur commise sur J est d'un ordre infiniment voisin de $2(q+1)$.

Voyons maintenant comment se fera le calcul effectif. Posons

$$J = \sum_{p=1}^{q} \varepsilon^{2p} J_p(x). \tag{80}$$

D'où

$$J_p(x) = \int_a^x \frac{R_p(x)}{x^2}\,dx + C_p, \tag{81}$$

C_p désignant une *constante égale au noyau de* J_p. Pour la calculer, écrivons

$$J = -A_0\theta^2 \int_0^s \frac{W + \sum_{n=1}^{n_1} \theta^n U_n e^{-X}}{(a-\theta s)^2}\,ds.$$

Comme au n° 28, on peut développer sous le signe $\int$ et intégrer terme à terme, sans changer l'ordre de l'erreur. D'après le n° 30, le coefficient de θ^n sous le signe $\int$ est de la forme $H_n(s) + e^{-X}K_n(X)$, H_n désignant un polynome de degré n et K_n une fonction d'ordre fini. En intégrant H_n de o à s, on obtient un polynome S_n de degré $n+1$ et sans terme constant. Quant au second terme, on peut le remplacer, avec une erreur d'ordre exponentiel, par

$$\Gamma_n = \int_0^{+\infty} e^{-X} K_n(X) W\,dX,$$

Remplaçons s par $\frac{\xi}{\theta}$, le produit $\theta^{n+1}S_n$ devient un polynome homogène, de

degré $n+1$ en θ, ξ, sans terme indépendant de ξ. On a alors

$$C_p = -\frac{a^p}{A_0^{2p-1}}\Gamma_{p-2}, \quad \text{si } p>1; \qquad C_1 = 0.$$

32. *Raccordement avec le point frontière de gauche.* — Les calculs précédents sont valables jusqu'au point frontière de gauche, si l'ordre à droite de ce point est $r=1$. Si $r>1$, ils sont seulement valables jusqu'en un point M_0 dont la distance ξ_0 au point frontière F est d'ordre $\alpha<r'$ (n° 16). La valeur correspondante y_0 de y, fournie par (23), est asymptotique à $\lambda_1 - u_1$, donc, d'après (8) et (16), à

$$b + A_0\xi_0^{r'} - \frac{a\varepsilon^2}{rA_0\xi_0^{r'-1}},$$

le troisième terme ne devant être gardé que s'il est infiniment grand par rapport au terme en ξ_0^{r+1} de λ, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{1}{r} < \alpha < r'; \tag{82}$$

ce qui est possible, puisque $rr' = \frac{2r}{2r-1} > 1$.

Pour faire le raccordement, nous adoptons la méthode du n° 21. Avec les notations du n° 19, nous avons $\sigma=1$, $\sigma'=1$ et nous prenons $\sigma''=1$. Remarquons d'abord que s_0 est d'ordre $\alpha - r' < 0$, donc infiniment grand. En outre

$$z_0 = s_0^{r'} - \frac{1}{rs_0^{r'-1}} + \dots.$$

Dès lors, *la fonction de raccordement sera déterminée par la condition d'être asymptotique à $s^{r'}$ pour les grandes valeurs de s.* Plus précisément, la fonction $W = s^{r'} - Z$ *doit être asymptotique à* $\frac{1}{rs^{r'-1}}$. Or, elle vérifie l'équation

$$W\frac{dW}{ds} = rWs^{r'-1} - 1. \tag{83}$$

Si l'on pose

$$W = \frac{w+1}{rs^{r'-1}}, \qquad r^2 s^{2r'-1} = \frac{1}{v},$$

cette équation devient

$$v^2\frac{dw}{dv} + \frac{w}{(2r-1)(1+w)} + \frac{r-1}{2r-1}v(1+w) = 0,$$

et w doit s'annuler pour $v=0$. On sait (1) que la fonction w existe et qu'elle est unique. De son développement asymptotique (2), on déduit

$$W = \frac{1}{rs^{r'-1}}\left[1 - \frac{r-1}{r^2 s^{2r'-1}} + \frac{(r-1)(4r-3)}{r^4 s^{4r'-2}} - \frac{(r-1)(3r-2)(9r-7)}{r^6 s^{6r'-3}} + \dots\right]. \tag{84}$$

(1) *Cf.* Émile Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 264. *Voir* aussi : J. Haag, *Sur les propriétés de certaines équations différentielles* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. LX, mai 1936).

(2) *Cf.* Émile Picard, *loc. cit.*, p. 266.

Montrons que W *est une fonction positive et décroissante de* s. Construisons la courbe C d'équation

$$W = \frac{1}{rs^{r-1}},$$

et indiquons le signe de $\frac{dW}{ds}$ dans les deux régions séparées par cette courbe. Pour s infiniment grand, le point M(s, W) est compris entre C et Os, comme il résulte de la formule (84). Donc, $\frac{dW}{ds} < 0$. Si s diminue, W augmente. Mais le point M ne peut traverser C, car il devrait le faire tangentiellement à une horizontale, ce qui est impossible. Ceci démontre la propriété ci-dessus énoncée.

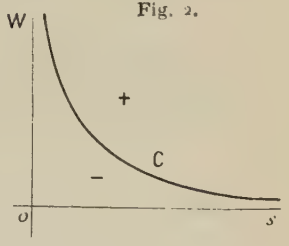


Fig. 2.

Signalons encore que, pour $s = 0$, la fonction W prend une valeur finie W_0. En effet, si elle tendait vers $+\infty$, sa dérivée tendrait vers zéro, d'après (83); en intégrant cette dérivée jusqu'à $s = 0$, on obtiendrait une valeur finie, contrairement à l'hypothèse. W_0 étant nécessairement positive, on en conclut que la fonction de raccordement prend une valeur finie $Z_0 < 0$ pour $s = 0$.

Nous précisons la fonction φ définie par (41), en convenant qu'elle s'annule avec s. Pour s infiniment grand, elle est de l'ordre de s^{2r-1}. Il s'ensuit que l'intégrale $J = \int_s^\infty \frac{e^{-\varphi}}{W} ds$ a un sens. D'autre part, la différence $We^{-\varphi} - J$ a une dérivée $e^{-\varphi}\frac{dW}{ds} < 0$. Son minimun est donc atteint pour $s = \infty$ et vaut zéro. Il s'ensuit qu'au n° 21 on peut prendre $K = 1$, quel que soit s_0.

Le rapport $\frac{W}{s^{r-1}}$ est minimum pour $s = s_0$, et ce minimum vaut asymptotiquement $\frac{1}{rs_0^{2r}}$. On en conclut que R est d'ordre $2r(r' - \alpha)$. Quant à R', il est d'ordre $(r-1)(r'-\alpha)$ La condition $\theta < R$ est remplie, car l'inégalité $r' > 2r(r' - \alpha)$ revient à $r\alpha > 1$. Quant à la condition $|\zeta| < R'$, elle l'est aussi, car nous allons montrer qu'on peut prendre $\zeta = 0$.

33. Appelons (T) la trajectoire exacte et (T') la trajectoire approchée calculée avec l'hypothèse précédente, c'est-à-dire issue du point M_0' d'abscisse $a + \xi_0$ et d'ordonnée $y_0' = b + A_0\theta^r Z_0$; tandis que (T) passe par M_0 d'abscisse $a + \xi_0$ et d'ordonnée y_0. Je dis que l'écart entre (T) et (T') est exponentiellement petit à partir du point M_1 d'abscisse $x_1 = a + k\xi_0$, k désignant un facteur quelconque compris entre zéro et *un*. D'après le n° 17, il nous suffit de prouver que les déviations u_0 et u_0' en M_0 et M_0' sont d'ordre $\beta = 2 - \alpha(r-1)$. Or, u_0 est asymptotique à $\frac{a\varepsilon^2}{rA_0\xi_0^{r-1}}$, qui est bien d'ordre β. D'autre part,

$$u_0' = A_0\xi_0^r(1 + B_0\xi_0) - A_0\theta^r Z_0 = A_0\theta^r(W_0 + B_0\theta s_0^{r-1}).$$

Le terme W_0 est d'ordre $(r-1)(r'-\alpha)$. Le terme $B_0\theta s_0^{r+1}$ est d'ordre $r'-(r+1)(r'-\alpha) > (r-1)(r'-\alpha)$, en vertu de $r\alpha > 1$. Dès lors, u_0' est d'ordre $rr'+(r-1)(r'-\alpha)=\beta$.

En définitive, *on commet une erreur exponentiellement petite sur la déviation en prenant pour point de raccordement un point* M_1 *dont la distance* ξ_1 *au point frontière est d'ordre* α *compris entre* $\frac{1}{r}$ *et* r', *à condition de prendre comme point de départ de la trajectoire* (T') *calculée par la présente méthode un point* M_0 *pour lequel* $\xi_0=\frac{\xi_1}{k}$, *avec* $k<1$.

34. *Calcul du développement.* — On pourrait utiliser les formules du n° 22. Il est un peu plus simple de développer la fonction X définie par

$$u = A_0\theta^r(W - Xe^{\varphi}), \tag{85}$$

u désignant la fonction $\lambda - y$ du n° 12. On a, entre X et Y, la relation

$$X = Y - B\theta s^{r+1}e^{-\varphi} = -Ve^{-\varphi}. \tag{86}$$

En utilisant les formules du n° 22 ou bien en formant l'équation différentielle que vérifie X et identifiant, on trouve, en appelant X_n le coefficient de θ^n dans le développement de X :

$$X_n = \int_{\varphi_0}^{\varphi} F_n e^{-\varphi}\, d\varphi, \tag{87}$$

avec

$$F_1 = \frac{s}{a} W[1-(r+1)ab_0 W s^{r-1}], \tag{88}$$

$$F_n = -(r+n)b_{n-1}s^{n+r-1}W^2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_{n-i}e^{\varphi}\left[(r+i)b_{i-1}Ws^{i+r-1} + \frac{X_i e^{\varphi}+F_i}{W}\right]. \tag{89}$$

La fonction φ est toujours définie par (41) et nous la précisons par la condition de s'annuler avec s. Quand s est très grand, on a la formule asymptotique

$$\frac{1}{W^2} = s^{2r-2}\left[r^2 + \frac{2(r-1)}{s^{2r-1}} - \frac{(r-1)(5r-3)}{r^2 s^{2(2r-1)}} + \dots\right], \tag{90}$$

qui nous montre que φ est infiniment grand de l'ordre de s^{2r-1}.

Introduisons les fonctions G_n et U_n définies comme F_n et X_n par les formules (87), (88), (89), mais *en remplaçant la borne inférieure* φ_0 *par* $+\infty$. Je dis que l'on a, pour s très grand,

$$G_n = s^{n+1-r}H_n(s), \qquad U_n e^{\varphi} = s^{n+1-r}K_n(s), \tag{91}$$

H_n et K_n désignant des séries asymptotiques en $\frac{1}{s^{2r-1}}$. La première de ces formules est exacte pour $n=1$, d'après (83) et (84). On en déduit que la seconde l'est aussi, d'après la note (D). Admettons-les jusqu'au rang $n-1$. Les for-

mules (89) et (84), puis la note (D), nous montrent que la propriété est exacte au rang n.

Posons maintenant

$$F_n - G_n = f_n, \qquad (X_n - U_n)e^{\tau} = x_n.$$

Convenant provisoirement de désigner par $Q(m)$ toute quantité de la forme Ms_0^m, où M désigne une constante positive quelconque, nous allons montrer que $|f_n|$ et $|x_n|$ ont une borne supérieure de la forme $e^{\tau-\tau_0}Q(2rn+1-r)$. D'abord, si la propriété est exacte pour f_n, elle l'est pour x_n. En effet,

$$x_n = e^{\tau}\int_{\tau_0}^{\tau} f_n e^{-\tau}\,d\tau - e^{\tau}\int_{\infty}^{\tau_0} G_n e^{-\tau}\,d\tau.$$

Le module du premier terme est inférieur à

$$e^{\tau-\tau_0}Q(2rn+1-r)(e^{-\tau}-e^{-\tau_0})e^{\tau} < e^{\tau-\tau_0}Q(2rn+1-r).$$

Le second terme est asymptotique à $-e^{\tau-\tau_0}s_0^{n-1-r}K_n(s_0)$. Comme $|K_n(s_0)|$ a une borne supérieure finie, le module de ce second terme est borné supérieurement par $e^{\tau-\tau_0}Q(n+1-r) < e^{\tau-\tau_0}Q(2rn+1-r)$. La propriété est vraie pour x_n.

Elle est évidente pour f_1, qui est nul, car $F_1 = G_1$. Admettons son exactitude jusqu'au rang $n-1$. De la formule (89), on déduit

$$(92)\qquad f_n = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{X_{n-i}e^{\tau}}{W}(x_i + f_i) + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-i}\left[\frac{U^i e^{\tau}+G_i}{W} + (r+i)b_{i-1}s^{i-r-1}W\right].$$

D'après la démonstration du n° 21, nous savons que la fonction V est majorée par $\frac{kW}{1-\theta R}$. On en déduit, d'après (86), que $\frac{Xe^{\tau}}{W}$ est majoré par $\frac{k}{1-\theta R}$. Donc,

$$\frac{X_n e^{\tau}}{W} < \frac{k}{R^n} = Q(2nr),$$

et le terme général de la première somme de (92) a un module inférieur à

$$Q|2r(n-i)|e^{\tau-\tau_0}Q(2ri+1-r) = e^{\tau-\tau_0}Q(2rn+1-r).$$

Il en est donc de même de ladite somme.

D'après (91), le terme général de la seconde somme de (92) s'écrit

$$s^i x_{n-i}\left[\frac{H_i + K_i}{s^{r-1}W} + (r+i)b_{i-1}s^{r-1}W\right].$$

Comme le module du crochet ci-dessus a une borne supérieure finie, on en déduit que le module de ce terme général est inférieur à

$$e^{\tau-\tau_0}Q|2r(n-i)+1-r|Q(i) < e^{\tau-\tau_0}Q(2rn+1-r).$$

Il en est de même de toute la somme et par conséquent de f_n. La propriété annoncée est donc justifiée.

Dès lors, si l'on calcule la déviation u par la formule

$$u = A_0\theta^r\left(W + \sum_{n=1}\theta^n U_n e^{\varphi}\right), \tag{93}$$

l'erreur commise sur chaque terme de la parenthèse a un module inférieur à $\theta^n Q(2rn+1-r)e^{\varphi-\varphi_0}$. Les deux premiers facteurs sont d'ordre fini. Quant au troisième, il est d'ordre exponentiel dès que $\varphi_0-\varphi$ est infiniment grand d'ordre non nul, c'est-à-dire dès que $\frac{s_0-s}{s_0}=\frac{\xi_0-\xi}{\xi_0}$ a une valeur finie. Cette condition est remplie à partir du point M_1 (n° 33). Dès lors, *l'erreur commise sur la somme d'un nombre fini de termes de la formule* (93) *est exponentiellement petite à partir du point de raccordement.*

Si l'on arrête la série au terme en θ^m, l'erreur commise a un module inférieur à $\frac{kW}{1-\frac{\theta}{R}}\left(\frac{\theta}{R}\right)^{m+1}$. En particulier, au point frontière, elle est d'ordre infiniment voisin de $(m+1)r'$ si, comme on peut le supposer, α est infiniment voisin de r'.

En faisant $s=0$ dans la formule (93), on obtient la *déviation au point frontière par une série asymptotique*. Cette déviation est de l'ordre de $\theta^{r'}$, donc d'ordre $rr'=\frac{2r}{2r-1}$. On voit que *cet ordre est toujours* >1.

35. *Calcul du temps.* — La formule (81) peut être appliquée jusqu'en M_1 (n° 33). Pour calculer l'intégrale J entre M_1 et F, utilisons la variable s et la formule (85) :

$$J=-A_0\theta^{r+1}\int_0^s \frac{W-\sum_{n+1}^{n_1}\theta^n U_n e^{\varphi}}{(a+\theta s)^2}\,ds. \tag{94}$$

En prenant n_1 assez grand, nous ne changeons pas l'ordre de l'erreur. Nous pouvons ensuite développer sous le signe $\int$ et intégrer terme à terme. Comme ξ_1 doit disparaître dans l'addition de la présente intégrale avec celle du n° 31, nous pouvons *réduire chaque coefficient à son noyau*, en appliquant les résultats des Notes (D) et (B). Nous faisons de même pour l'intégrale figurant dans (81), en lui appliquant ceux de la Note (E).

Bien entendu, nous remplaçons, dans (80), ε^2 par $\frac{A_0^2}{a}\theta^{2r-1}$. On doit constater, après l'addition, que les coefficients des différentes puissances de θ sont bien constants et ne contiennent plus $\log\xi$.

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

DES

OSCILLATIONS DE RELAXATION

PAR M. J. HAAG.

(*Suite et fin.*)

CHAPITRE IV.

ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE.

36. *Départ du point frontière.* — Nous arrivons au point frontière F avec une déviation D_0 qui nous est donnée par la formule (93). Nous appellerons r_1 l'ordre à droite de F et r l'ordre à gauche. L'ordre le D_0 est

$$\beta = r_1 r'_1 = \frac{2r_1}{2r_1 - 1}.$$

Pour quitter F vers la gauche, nous appliquons encore la méthode générale exposée dans la section III du Chapitre I. Nous avons cette fois $\sigma = -1$, $\sigma' = 1$, $\sigma'' = -1$. Trois cas sont à distinguer, suivant que r est supérieur, inférieur ou égal à r_1.

CAS I. — $r > r_1$. — On a $\beta < rr'$. Nous appliquons la méthode du n° 20, en posant $\theta = \varepsilon^{\frac{\beta}{r}}$; de sorte que θ' est d'ordre $2 - \beta\frac{2r-1}{r} > 0$. On a $z_0 = \frac{D_0}{A_0 \varepsilon^{\beta}}$. Donc, Z_0 a une valeur finie et positive. Quant à la variable ζ, elle nous est donnée par une série asymptotique en θ_1, donc en $\theta^{\frac{r}{r_1}}$. Son ordre est $\frac{\beta}{r_1} = 2(\beta - 1)$.

Nous avons $s_0 = 0$, $s_1 = S > 0$. La première formule (33) nous donne $W = Z_0 + s^r > 0$. L'intégrale J n'est jamais nulle; pour s très grand, elle est finie, car $r > 1$. Le rapport $\frac{W}{J}$ est fini pour toute valeur finie de s. Si s est très grand, il est de l'ordre de s^r. Donc, son minimum K est fini.

Le rapport $\frac{W}{s^{r+1}}$ est une fonction décroissante de s; son minimum est de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$.

On en conclut, en se reportant aux inégalités (34), (35) et (36), que R est de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$; R′ et R″ sont finis. Dès lors, la convergence est assurée, pour $0 < s < s_1$, si $0s_1$ a une valeur finie ξ_1 suffisamment petite. Autrement dit, la méthode nous permet d'*atteindre un point* M_1 *situé à une distance finie du point frontière.*

Cas II. — $r = r_1$. — On a $\beta = rr'$. Nous appliquons la méthode du n° 21. La valeur de Z_0 est finie et positive; ζ est donné par une série asymptotique en 0. La *fonction de raccordement* Z est déterminée par l'équation différentielle (39) et la condition de prendre la valeur Z_0 pour $s = 0$. La fonction $W = Z + s^r$ est toujours positive.

Signalons tout de suite quelques propriétés de ces deux fonctions. D'abord, elles sont toutes deux croissantes. On en conclut que $W > Z_0 + s^r$ et par suite

$$Z < Z_0 + \int_0^s \frac{ds}{Z_0 + s^r}.$$

Si $r > 1$, l'intégrale du second membre reste finie pour $s = \infty$; donc Z *tend vers une limite finie* H. *Si* $r = 1$, on a

$$s = Ce^Z - Z - 1, \qquad C = (Z_0 + 1)e^{-Z_0}. \tag{95}$$

Pour s infiniment grand, Z est *asymptotique* à $\log s$.

La fonction φ est bornée quel que soit s. La dérivée de la fonction $We^{\varphi} - J$ est $e^{\varphi}\frac{dW}{ds} > 0$. Cette fonction est donc minimum pour $s = 0$; elle est donc toujours positive et l'on peut prendre $K = 1$. D'autre part, le minimum de $\frac{W}{s^{r+1}}$ est de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$, si s_1 est infiniment grand. En se reportant aux inégalités (45) et (48), on en conclut que R est de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$ et que R′ est fini. Il s'ensuit, comme précédemment, que l'*on peut atteindre un point* M_1 *situé à une distance finie du point frontière.*

Cas III. — $r < r_1$. — On a $\beta > rr'$. Si nous appliquons encore la méthode du n° 21, nous voyons que cette fois Z_0 est nul. Il en est de même du minimum de W; donc, $R' = 0$. *On ne peut pas développer* Y *suivant les puissances de* θ *et* ζ, tout au moins pour les petites valeurs de s. *La méthode du cas II ne s'applique que si* $\zeta = 0$.

La difficulté qui se présente ici tient à ce que les données initiales ($s = 0$, $Z = 0$) constituent une *singularité* pour l'équation différentielle (39),

puisqu'elles rendent infinie la dérivée $\frac{dZ}{ds}$. Si l'on considère la solution de cette équation qui prend la valeur ζ pour $s=0$, elle ne peut pas être développée suivant les puissances de ζ quand s est très petit.

Dans le cas où r est entier, on peut tout de même calculer le développement de z suivant les puissances de θ et ζ, à condition que s ne soit pas nul. Voici le principe de la méthode.

La fonction z est définie par l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dz}\left(1-\theta\frac{s}{a}\right)=z+s^r+B\theta s^{r+1}$$

et la condition que $z=\zeta$ pour $s=0$. Si l'on pose $z=\zeta+X$, on a

$$\frac{ds}{dX}\left(1-\theta\frac{s}{a}\right)=X+s^r+\zeta+B\theta s^{r+1}, \qquad X=0 \text{ pour } s=0. \tag{96}$$

Ceci nous définit s comme fonction holomorphe de X, θ et ζ dans des cercles de rayon fini pour les trois variables. Si s a une valeur *donnée* s_0 assez petite, mais non nulle, on peut ensuite, d'après le théorème des fonctions implicites, calculer X par une série entière en θ, ζ. On en déduit la valeur z_0 de z. Soit d'autre part Z_0 la valeur de la fonction de raccordement pour $s=s_0$. Posons $\zeta_0=z_0-Z_0$ et proposons-nous de calculer z pour les valeurs de s comprises entre s_0 et $s_1>s_0$.

Appliquons de nouveau la méthode du n° 21. Cette fois, le minimum de W est $Z_0+s_0^r$; il n'est pas nul; donc, la difficulté qui nous a arrêtés tout à l'heure disparaît et nous pouvons développer z suivant les puissances de θ et de ζ, dans les mêmes conditions que dans le cas II, c'est-à-dire *jusqu'en un point* M_1 *situé à une distance finie du point frontière*. Nous pouvons ensuite remplacer ζ_0 par son développement suivant les puissances de θ et ζ; de sorte que *nous obtenons également z sous forme d'une série entière en* θ, ζ. Bien entendu, ses coefficients doivent être de simples fonctions de s et ne plus garder trace de la variable intermédiaire s_0. En outre, *le développement cesse d'être valable quand s tend vers zéro.*

Dans le cas où r n'est pas entier, l'équation (96) admet tout de même une solution et une seule prenant la valeur $s=0$ pour $X=0$, car la dérivée $\frac{ds}{dX}$ vérifie une condition de Lipschitz, puisque $r>1$. Mais, cette solution n'est pas holomorphe au voisinage de $X=0$. Nous verrons (n° 42) qu'on peut alors calculer un *développement limité* de X suivant les puissances de θ et ζ, en arrêtant ce développement aux termes de degré compris entre $r-2$ et $r-1$.

37. *Calcul asymptotique de la déviation, pour s très grand, dans le cas I.* — Nous employons les formules (51) et (52). Voyons ce qu'elles nous donnent pour s très grand.

Remarquons d'abord que si l'on pose $u = \frac{1}{s^r}$, la fonction $\frac{s^r}{U} = \frac{1}{W u + \zeta u + B\xi}$ peut être considérée comme une fonction holomorphe des trois variables ξ, ζ, u au voisinage de zéro. Adoptons maintenant la terminologie de la Note (B), en prenant r pour nombre caractéristique. Je dis que $\frac{dY_n}{ds}$ peut être développé en série entière en ξ, ζ, dont chaque coefficient est un polynome (H) de degré $n-1$ et d'ordre $\leqq -r$.

S'il en est ainsi, on en conclut, en remplaçant ξ par θs, appliquant la note (B) et remplaçant ensuite θ par $\frac{\xi}{s}$, que Y_n est une série entière en ξ, ζ, dont chaque coefficient est un polynome (H) de degré n et d'ordre $\leqq o$, puisque $1 - r < o$. D'autre part, la propriété est exacte pour $n = 1$, d'après la formule (51) et la remarque faite ci-dessus concernant $\frac{s^r}{U}$. Admettons qu'elle le soit jusqu'au rang $n-1$. Le produit $Y_i \frac{dY_{n-i}}{ds}$ figurant dans (52) est une série entière en ξ, ζ, dont chaque coefficient est un polynome (H) de degré $n-1$ et d'ordre $\leqq -r$. Il en est donc de même de F_n et *a fortiori* de $\frac{F_n}{U}$. La propriété est donc vraie au rang n (1).

On en déduit que la déviation peut s'écrire

$$D = A_0 \theta^r \left(Z_0 + \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \theta'^n \Delta_n \right), \tag{97}$$

Δ_n désignant une série entière en ξ, ζ, dont les coefficients sont des polynomes (H) de degré n et d'ordre $\leqq o$. Nous pouvons maintenant, dans ces coefficients, remplacer s par $\frac{\xi}{\theta}$. L'ordre étant $\leqq o$, nous ne faisons apparaître aucune puissance négative de θ. Nous pouvons ensuite ordonner le développement de Δ_n suivant les variables θ, ζ; mais à la condition de nous contenter de *développements limités*. Si l'on convient que les exposants de θ', ξ, ζ ne dépasseront pas respectivement n_1, p_1, q_1, l'ordre de l'erreur commise sur D est (n° 20) le plus petit des trois nombres

$$\alpha r - (n_1 + 1)\left(2 - \beta \frac{2r-1}{r}\right), \quad \alpha r + (p_1 + 1)\alpha, \quad \alpha r + 2(q_1 + 1)(\beta - 1),$$

en supposant que ξ et ξ_1 sont d'ordre α. Si α est très petit et p_1 assez grand, l'ordre de l'erreur est très voisin du plus petit des deux nombres

$$(n_1 + 1)\left(2 - \beta \frac{2r-1}{r}\right) \quad \text{et} \quad 2(q_1 + 1)(\beta - 1).$$

(1) On peut même affirmer que, pour $n > 1$, l'ordre des coefficients de $\frac{dY_n}{ds}$ est $\leqq -2r$.

Dans ces conditions, on peut écrire

$$\Delta_n = \sum_p \sum_q \theta^p \zeta^q \Delta_{npq}(\xi), \tag{98}$$

les exposants p étant de la forme $p'r + p''$, où p' et p'' sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, mais tels que p soit toujours ≥ 0. Quant aux coefficients $\Delta_{npq}(\xi)$, ce sont des polynomes en $\log\frac{\xi}{\theta}$, dont les coefficients se présentent sous la forme de développements limités procédant suivant certaines puissances de ξ et poussés d'autant plus loin que p_1 est plus grand et par conséquent que α est plus petit.

38. *Même calcul dans le cas II.* — Nous employons les formules (54) à (58). Cherchons un développement asymptotique des coefficients Y_{np} pour s très grand. Cherchons d'abord le développement de Z.

Dans le cas $r > 1$, nous avons vu (n° 36) que la fonction Z tend vers une limite finie H pour s infini. Observons, de plus, que l'équation (39) ne peut admettre une autre solution Z' ayant la même limite. En effet, s'il en était ainsi, la différence $X = Z - Z'$ vérifierait l'équation

$$\log\frac{X_0}{X} = \int_0^s \frac{ds}{WW'}$$

et devrait tendre vers zéro pour s infini. Or, le premier membre ci-dessus tendrait vers $+\infty$, tandis que le second resterait fini.

Ceci étant, posons

$$u = \frac{H}{s^r}, \qquad v = \frac{1}{s^{2s-1}}, \qquad Z = H + \frac{\psi}{s^{r-1}}. \tag{99}$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver une fonction ψ des deux variables u et v, holomorphe au voisinage de $u = v = 0$ et telle que Z vérifie l'équation (39). Comme la fonction Z ainsi obtenue tend vers H pour s infini, elle coïncide nécessairement avec la fonction de raccordement.

Pour que la fonction Z définie par les formules (99) vérifie (39), il suffit que ψ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$ru\frac{\partial\psi}{\partial u} + (2r-1)v\frac{\partial\psi}{\partial v} + (r-1)\psi = -\frac{1}{1+u+v\psi}.$$

Si l'on dérive n fois par rapport à u, p fois par rapport à v et que l'on annule ensuite u, v et ψ, on obtient au premier membre

$$[nr + p(2r-1) + r - 1]\left(\frac{\partial^{n+p}\psi}{\partial u^n\,\partial v^p}\right)_{u=v=0}$$

et, au second membre, une fonction linéaire des dérivées d'ordre moindre par

rapport à v. On peut donc calculer, de proche en proche, tous les coefficients du développement de ψ suivant les puissances de u et v.

Quant à la convergence, on peut remarquer (¹) que lesdits coefficients sont majorés par ceux du développement de la fonction ψ vérifiant l'équation du second degré

$$(r-1)\psi = \frac{1}{1-u-v\psi}$$

et se réduisant à $\frac{1}{r-1}$ pour $u=v=0$. Cette dernière fonction est holomorphe si l'on a

$$(r-1)^2(1-u)^2 - 4v > 0,$$

donc au voisinage de $u=v=0$. On peut donc développer ψ suivant les puissances de u et v.

On a ensuite

$$\frac{W}{s^r} = 1 + u + v\psi.$$

Voici les premiers termes du développement de cette fonction

$$(100)\qquad \frac{W}{s^r} = 1 + \frac{H}{s^r} - \frac{1}{(r-1)s^{2r-1}} + \frac{H}{(2r-1)s^{3r-1}} - \frac{1}{(r-1)(3r-2)s^{4r-2}} - \frac{H^2}{(3r-1)s^{4r-1}} + \dots;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{W^2} = \frac{1}{s^{2r}}\left[1 - \frac{2H}{s^r} + \frac{2}{(r-1)s^{2r-1}} + \frac{3H^2}{s^{2r}} - \frac{2(7r-4)H}{(r-1)(2r-1)s^{3r-1}} + \dots\right].$$

Adoptons la terminologie de la Note (B), en prenant r et $2r-1$ pour nombres caractéristiques. On déduit de ce qui précède que φ, e^{φ}, $e^{-\varphi}$ sont des séries (B) d'ordres respectifs $1-2r$, 0, 0.

Dans le cas $r=1$, posons

$$(101)\qquad u = \frac{1}{s}, \qquad v = \frac{\log s - \log C}{s}, \qquad \frac{Z}{s} = v + w.$$

On aboutit aux mêmes équations et aux mêmes conclusions qu'au n° 25 et l'on voit, avec la terminologie de la Note (C), que $\frac{W}{s}$, e^{φ} et leurs inverses sont des séries (C) d'ordre nul.

39. Arrivons maintenant au *développement des fonctions* Y_{np}, en supposant d'abord $r>1$.

(¹) Voir un raisonnement analogue dans Émile Picard, *loc. cit.*, p. 268 et 269.

Nous allons prouver que $\frac{dY_{np}}{ds}$ est, pour s très grand, un polynome (H) d'ordre (1) $n-r$. On en conclut d'abord que Y_{np} est un polynome (H) d'ordre $n+1-r$ ou zéro, suivant que $n>r-1$ ou que $n\leq r-1$; puis que V_{np} est du même ordre si $p>0$, d'ordre $n+r$ si $p=0$; puis que $\frac{V_{np}}{W}$ est d'ordre $n+1-2r$ ou $-r$ si $p>0$, d'ordre n si $p=0$; puis que $\frac{Y_{np}}{W^2}$ est d'ordre $n+1-3r$ ou $-2r$ et enfin que $\frac{Y_{np}}{W^2}-\frac{dY_{np}}{ds}$ est d'ordre $n-r$. Ceci étant, les formules (55) et (56) nous montrent d'abord que la propriété est exacte (2) pour Y_{01} et Y_{10}. Admettons qu'il en soit de même pour Y_{i0} et $i<n$. Chaque terme de la somme figurant dans la formule (57) est d'ordre $i-r+n-i+1-2r=n+1-3r$ ou $i-2r<n-2r$. Donc, cette somme est d'ordre $<n-2r$. Il s'ensuit que le crochet est d'ordre $n-r$, ce qui démontre la propriété pour Y_{n0}.

Admettons maintenant la propriété pour Y_{ij}, avec $i+j<n+p$. Le terme général de la somme double figurant dans (58) est d'ordre

$$i'-r+i+1-2r=n+1-3r \qquad \text{ou} \qquad i'-2r\leq n-2r, \qquad \text{si } j>0.$$

Mais, si $j=0$, il est d'ordre $i'-r+i=n-r$. Comme j peut prendre effectivement la valeur zéro, on voit que le crochet est d'ordre $n-r$.

Dans le cas $r=1$, $\frac{dY_{np}}{ds}$ est, pour s très grand, une série (C) d'ordre $n-1$, au sens de la Note (C) et, par conséquent, Y_{np} est une série (C) d'ordre n. La démonstration est exactement la même que ci-dessus.

40. Nous pouvons remplacer, dans (49), chaque coefficient Y_{np} par son développement; mais, nous ne pouvons pas considérer la série triple obtenue comme absolument convergente et devons nous en tenir à des *développements limités*. Si nous limitons la série (49) comme au n° 21 et si nous appelons toujours α l'ordre de ξ et ξ_1, l'ordre de l'erreur sur D est égal au plus petit des deux nombres $(r+n_1+1)\alpha$ et $r\alpha(p_1+1)r'$. Si α est très petit et n_1 assez grand, cet ordre sera très voisin de $(p_1+1)r'$.

Remplaçons maintenant chaque produit $Y_{np}e^{-\varphi}$, ainsi que Z, par son développement, en ne gardant que les termes donnant dans D des termes d'ordre inférieur à l'ordre ci-dessus. Puis, remplaçons s par $\frac{\xi}{\theta}$. Nous ne faisons apparaître, dans z, aucune puissance négative de θ; car, le plus fort exposant de s dans Y_{np} étant $n+1-r$ ou zéro, le plus petit exposant de θ dans $\theta^n Y_{np}e^{-\varphi}$

(1) L'évaluation du degré est plus compliquée; mais, nous n'avons pas besoin de le connaître.

(2) Signalons cependant que $\frac{dY_{01}}{ds}$ est d'ordre $-2r<-r$; mais, Y_{01} est d'ordre nul et cela ne modifie en rien les conclusions ci-dessus.

est $r-1$ ou n. Nous obtenons finalement une série asymptotique de la forme

$$D = A_0 \theta^r \left[\sum_p \sum_q \theta^p \zeta^q \Delta_{pq}(\xi) \right], \tag{102}$$

où chaque exposant p est, comme au n° 37, de la forme $p'r+p''$. Quant aux coefficients Δ_{pq}, ils sont analogues aux coefficients Δ_{npq}.

41. *Même calcul dans le cas III.* — Il peut se faire, comme dans le cas II, avec cette différence que *les intégrales donnant les* Y_{np} *ne peuvent plus avoir zéro comme borne inférieure*, puisque le développement n'est pas valable jusqu'à $s=0$. On peut écrire simplement

$$Y_{np} = I_{np}(s) + \Gamma_{np},$$

$I_{np}(s)$ désignant une fonction déterminée et Γ_{np} une *constante inconnue*. Appliquons la méthode esquissée au n° 36.

Soit $S(Z)$ la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dS}{dZ} = Z + S^r = W$$

qui s'annule pour $Z=0$. Cette fonction n'est autre que la *fonction inverse de la fonction de raccordement*.

L'équation (96) admet une solution holomorphe en X, θ, ζ:

$$s = S(X) + \Sigma\Sigma \theta^n \zeta^p S_{np}(X) \qquad (n+p>0).$$

A la variable s, substituons la variable Z définie par $s=S(Z)$. L'équation ci-dessus s'écrit

$$S(Z) = S(X) + \sum\sum \theta^n \zeta^p S_{np}(X). \tag{103}$$

Posons

$$X = Z + u, \qquad u = \sum\sum \theta^i \zeta^j X_{ij}(Z).$$

On a

$$z = \zeta + Z + u = Z + \zeta + Y e^{-\varphi};$$

donc

$$Y = u e^{\varphi}.$$

Donc, *si l'on exprime les* Y_{np} *en fonction de* Z, on a identiquement

$$I_{np}(Z) + \Gamma_{np} = e^{\varphi} X_{np}. \tag{104}$$

En égalant les noyaux des deux membres, on a Γ_{np}.

Une difficulté se présente du fait que la fonction φ devient infinie pour $s=0$, car W^2 est de l'ordre de s. Nous la préciserons en prenant $+\infty$ comme borne

inférieure de l'intégrale (41). Introduisons maintenant la fonction ψ définie par

$$\psi = r\int_0^Z S^{r-1}(Z)\,dZ. \tag{105}$$

Elle est liée à φ par l'identité

$$e^{\varphi+\psi} = kW, \tag{106}$$

où k désigne une constante que nous calculerons ultérieurement. On justifie cette identité en dérivant logarithmiquement les deux membres. En portant dans (104), il vient

$$I_{np}(Z) + \Gamma_{np} = kWe^{-\psi}X_{np}(Z) \tag{107}$$

et la difficulté précédente a disparu.

Calculons les X_{np}. L'équation (103) s'écrit

$$0 = uW + \frac{u^2}{2}W'(Z) + \ldots + \sum\sum \theta^n\zeta^p[S_{np}(Z) + uS'_{np}(Z) + \ldots]. \tag{108}$$

En remplaçant u par son développement et identifiant, on peut *calculer de proche en proche tous les* X_{np}.

Pour calculer les S_{np}, faisons, sur (96), le changement de variable

$$s = S(X) + Ue^{\psi}; \tag{109}$$

l'équation devient, en posant $U' = \frac{dU}{dX}$,

$$U'e^{\psi} = \theta\frac{S+Ue^{\psi}}{a}[W + e^{\psi}(U' + UrS^{r-1})] + \zeta + B\theta(S+Ue^{\psi})^{r+1} + F, \tag{110}$$

avec

$$F = (S+Ue^{\psi})^r - S^r - rS^{r-1}Ue^{\psi} = \frac{r(r-1)}{2}S^{r-2}U^2e^{2\psi} + \ldots.$$

Bien entendu, dans $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\theta^n s^n$, on doit remplacer s par $S + Ue^{\psi}$. En posant $U = \sum\sum \theta^n\zeta^p U_{np}$ et identifiant, on voit qu'on peut calculer de proche en proche tous les coefficients U_{np} et l'on en déduit $S_{np} = U_{np}e^{\psi}$.

Quant aux fonctions $I_{np}(Z)$, elles se calculent toujours par les formules du n° 22, en prenant Z pour variable et calculant de proche en proche les constantes Γ_{np}, qui sont nécessaires pour calculer les I_{np} suivants.

Calculons enfin la constante k. D'après (106), c'est la limite de $\frac{e^{\psi}}{W}$ pour $s = \infty$. Or, on peut écrire

$$\psi = r\int_0^s \frac{s^{r-1}}{W}\,ds = r\int_0^s \left(\frac{1}{s} - \frac{Z}{sW}\right)ds = r\log s + r\int_0^1 \frac{s^{r-1}}{W}\,ds - r\int_1^s \frac{Z}{sW}\,ds.$$

Posons

$$K = r\int_0^1 \frac{s^{r-1}}{W}\,ds - r\int_1^\infty \frac{Z}{sW}\,ds. \tag{111}$$

On a

$$k = e^K. \tag{112}$$

Les coefficients Y_{np} étant déterminés, leurs développements asymptotiques pour s très grand se calculant comme au n° 39 et l'on aboutit encore à une formule analogue à (102).

42. Dans le *cas où r n'est pas entier*, la fonction F figurant dans (110) ne peut plus se calculer par la formule du binome. On peut toutefois en calculer un *développement limité*, par la formule de Taylor. Si ρ désigne la partie entière de r, on arrête ce développement au terme de degré $\rho - 1$ en Ue^{ψ}. Le reste garde un sens pour $X = 0$ et les calculs précédents continuent à être valables, à condition que $n+p$ ne dépasse pas $\rho - 1$; autrement dit, *la valeur maximum permise à $n+p$ est comprise entre $r-2$ et $r-1$.*

Remarque. — Le cas III rentre dans le cas II lorsque $\zeta = 0$, car le rayon de convergence R′ n'intervient plus. On est donc sûr *a priori* que les coefficients Y_{n0} sont les mêmes dans les deux cas. Autrement dit, *les constantes Γ_{n0} doivent toutes être nulles*, si les I_{n0} sont calculés comme dans le cas II.

43. *Prolongement de l'arc.* — Par la méthode précédente, nous savons calculer la déviation D_0 en un point M_0 d'abscisse $a - \xi_0$ si l'ordre α de ξ_0 est $< \frac{\beta}{r}$. Cette déviation se présente sous la forme d'une série asymptotique à trois ou deux variables. Il s'agit maintenant de calculer la déviation D en un point M pour lequel ξ a une valeur finie. A cet effet, nous pouvons appliquer la méthode du n° 10, car les inégalités (11) sont vérifiées. On a vu que R et R′ sont d'ordres respectifs $\alpha(2r-1)$ et $r\alpha$. Si la série est limitée comme on l'a supposé à la fin du n° 10, l'ordre de l'erreur commise est égal au plus petit des deux nombres

$$(n_1+1)[2-\alpha(2r-1)] \quad \text{et} \quad (p_1+1)(\beta-\alpha r),$$

dans lesquels on peut d'ailleurs supposer α aussi petit qu'on veut. Nous pouvons maintenant remplacer, dans ce développement limité, D_0 par le développement (97) ou (102) et ε^2 par $\frac{A_0^2}{a}\theta'\theta^{2r-1}$. On obtient ainsi un développement asymptotique procédant suivant certaines puissances de θ', θ, ζ et dont les coefficients doivent dépendre seulement de ξ. D'autre part, ce développement doit coïncider avec (97) ou (102) lorsque ξ est d'ordre α, cette coïncidence

devant avoir lieu avec l'approximation précédemment précisée. Nous pouvons dès lors poser

$$D = A_0 \theta^r \Big[\sum\sum\sum \theta'^n \theta^p \zeta^q D_{npq}(\xi) \Big] \tag{113}$$

ou

$$D = A_0 \theta^r \Big[\sum\sum \theta^p \zeta^q D_{pq}(\xi) \Big] \tag{114}$$

et nous connaissons les développements limités Δ_{npq} de D_{npq} et Δ_{pq} de D_{pq}, lorsque ξ est infiniment petit. Substituons (113) ou (114) dans (10), en y remplaçant ε^2 par la valeur remplacée plus haut. En identifiant, nous pouvons calculer, de proche en proche, tous les coefficients D_{npq} ou D_{pq} par des quadratures, dont chacune introduit une constante inconnue. *Ces constantes se déterminent par comparaison des noyaux.*

Remarque. — La partie principale de D est obtenue en prenant le terme pour lequel q est nul et $n+p$ ou p minimum. *Si l'ordre* β *de* D *est* < 2, il n'y a pas de terme correspondant au second membre de (10). On en conclut que *le coefficient de la partie principale est constant.* Il en est de même, plus généralement, pour tous les termes d'ordre < 2.

Les autres termes sont donnés par des *intégrales portant sur des fractions ayant en dénominateur certaines puissances entières de* $1 + B\xi$, *donc de* $\lambda - b$.

44. *Calcul du temps.* — Au départ du point frontière de droite, nous appliquons la formule (59), en remplaçant z par son développement limité et intégrant terme à terme; nous obtenons un développement limité de la forme

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{a} \theta^r \sum\sum\sum \theta'^n \theta^p \zeta^q \Theta_{npq}(s).$$

Nous employons ensuite la formule (12), en y remplaçant D par le développement limité (113) ou (114). En additionnant, nous obtenons un développement limité ne contenant plus la variable intermédiaire et ayant la forme

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{a} \theta^r \sum\sum\sum \theta'^n \theta^p \zeta^q T_{npq}(\xi), \tag{115}$$

avec

$$T_{npq}(\xi) = \int \frac{a}{x} D'_{npq}(\xi) d\xi. \tag{116}$$

Cette intégrale indéfinie comporte une *constante inconnue*, que l'on détermine par *identification des noyaux* :

$$N(T_{npq}) = N(\Theta_{npq}).$$

Ceci s'applique sans difficulté aux cas I et II.

Dans le cas III, on ne peut pas calculer directement $\Theta_{np}(s)$, parce qu'*on ne peut pas intégrer depuis zéro*. On peut seulement écrire

$$\Theta_{np}(s) = K_{np}(s) + C_{np},$$

$K_{np}(s)$ étant une fonction déterminée et C_{np} une constante inconnue. Pour calculer cette constante, revenons au n° 41. L'intégrale de la formule (59) peut s'écrire

$$\Theta = \int_0^X \frac{a\,dX}{a - \theta s}.$$

En développant sous le signe $\int$ suivant les puissances de θ et intégrant, on obtient

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n \theta^n,$$

chaque coefficient Θ_n étant donné par une quadrature en fonction de X. Remplaçons ensuite X par $Z + u$ et u par son développement. Nous pouvons de la sorte *calculer* Θ_{np} *en fonction de* Z. On calcule de même K_{np} et, *en comparant les noyaux*, on en déduit C_{np}. On continue ensuite comme dans le cas II.

45. *Raccordement avec un point frontière de seconde espèce.* — Les méthodes précédentes nous permettent de calculer l'arc complet, s'il se termine au sommet inférieur. Dans le cas contraire, il est limité à gauche par un point frontière F de seconde espèce. En vertu des conditions (11), nous pouvons atteindre un point M_0 dont la distance ξ_0 à F est d'ordre (1) $\alpha < \beta$. A partir de ce point, nous devons appliquer la méthode du n° 20, en y faisant $\sigma = 1$, $\sigma' = 1$, $\sigma'' = -1$, $s_0 = \frac{\xi_0}{\theta}$ et $s_1 = 0$. Deux cas sont à distinguer suivant que β est inférieur ou égal à 2.

Cas I. — $\beta < 2$. — Nous posons $\theta = \varepsilon^3$. La partie principale de D_0 ayant un coefficient constant (n° 43), la partie principale Z_0 de z_0 est une constante positive. On a

$$W = Z_0 + s, \qquad J = \log \frac{Z_0 + s_0}{Z_0 + s}.$$

Le minimum de $\frac{W}{J}$ est obtenu pour $s = 0$ et vaut $\frac{Z_0}{\log(Z_0 + s_0) - \log Z_0}$; il est de l'ordre de $\frac{1}{\log s_0}$, donc de $-\frac{1}{\log \varepsilon}$; R est de l'ordre de $\frac{1}{s_0}$, c'est-à-dire d'ordre $\beta - \alpha$; R′ est de l'ordre de $-\frac{1}{\log \varepsilon}$; R″ est fini; *la convergence est assurée jusqu'au point frontière.*

(1) La condition $\alpha < r'$ est entraînée par $\alpha < \beta$, parce que $r' = 2$ et $\beta \leq 2$.

Cas II. — $\beta = 2$. — C'est le cas où *le point frontière de droite est d'ordre 2 à droite et à gauche*. La partie principale de D_0 contient une intégrale portant sur une fraction admettant le facteur $\lambda - b$ en dénominateur. Cette intégrale est de l'ordre de $\log\xi_0$; donc, D_0 est de l'ordre de $-\varepsilon^2\log\varepsilon$. Dès lors, nous posons

$$\theta = -\varepsilon^2\log\varepsilon, \qquad \theta' = -\frac{a}{A_0^2\log\varepsilon}. \tag{117}$$

Les rayons de convergence sont du même ordre que précédemment. En particulier, R′ est de l'ordre de θ′; il faut donc l'examiner de plus près, pour voir s'il est effectivement $> \theta'$. La constante K est asymptotique à $\frac{Z_0}{\log s_0}$. Or, $s_0 = \frac{\varepsilon_0}{\theta}$ est de l'ordre de $\frac{\varepsilon^{\alpha-2}}{\log\varepsilon}$; donc, $\log s_0$ est asymptotique à $(\alpha-2)\log\varepsilon$ et K est asymptotique à $\frac{Z_0}{(\alpha-2)\log\varepsilon}$. Comme R′ est égal à K, à un facteur constant près, on peut toujours *choisir α assez voisin de* 2 pour que $R' > \theta'$; moyennant quoi, *la convergence est assurée jusqu'au point frontière*.

46. *Calcul du développement.* — Appelons F_1 le point frontière de droite et affectons de l'indice *un* les quantités correspondantes. *Dans le cas I*, on a, d'après la remarque du n° 43,

$$\theta = \varepsilon^3 = K\theta_1'\theta_1^{\mu r_1+\nu},$$

K désignant une constante et μ, ν deux entiers tels que $\mu r_1 + \nu < 2r_1 - 1$. D'autre part,

$$\varepsilon^2 = \frac{A_0^2}{a}\theta'\theta = \frac{A_1^2}{a_1}\theta_1'\theta_1^{2r_1-1};$$

d'où

$$\theta' = K'\theta_1^{\mu' r_1+\nu'}, \qquad \mu' = 2-\mu, \qquad \nu' = -\nu-1, \qquad K' = \text{const.}$$

Ceci étant, la déviation au point M situé à la distance ξ d'ordre α du point frontière F nous est donnée par un développement de la forme

$$D = \sum\sum\sum \theta_1'^{n}\theta_1^{p}\zeta_1^{q} D_{npq}(\xi).$$

En appliquant la méthode de la note (E) aux coefficients D_{npq}, puis en remplaçant ξ par $\theta s = Ks\theta_1'\theta_1^{r_1+\nu}$ et divisant enfin par $A_0\theta$, on obtient un développement limité de la fonction z et par conséquent de Y :

$$Y = \Sigma\Sigma\Sigma\theta_1'^{n}\theta_1^{p}\zeta_1^{q} Y^1_{npq}(s), \tag{117}$$

où chaque coefficient Y^1_{npq} se présente sous la forme d'un développement limité procédant suivant certaines puissances croissantes, positives ou négatives, de s.

Mais ce développement ne peut être poursuivi jusqu'au point F.

Pour atteindre ce point, nous devons développer Y suivant les puissances de θ′, θ, ζ. Les coefficients Y_{npq} de ce nouveau développement se calculent par

des quadratures, au moyen des formules du n° 22. Chacune de ces quadratures introduit une *constante inconnue*.

Les variables θ' et θ s'expriment en fonction de θ'_1 et θ_1 comme il a été indiqué plus haut. Quant à la variable ζ, elle est obtenue en réduisant la différence $z_0 - Z_0$ à sa partie constante, c'est-à-dire indépendante de ξ_0 ; elle se présente sous la forme d'une série asymptotique en θ'_1, θ_1, ζ_1.

Le nouveau développement de Y étant limité, nous pouvons y remplacer θ', θ, ξ par leurs valeurs en fonction de θ'_1, θ_1, ξ_1, puis ordonner suivant ces dernières variables. Le développement limité ainsi obtenu doit coïncider avec (118), en ce sens que chacun de ses coefficients doit constituer un développement limité du coefficient correspondant $Y^1_{npq}(s)$. *En égalant les noyaux*, on peut déterminer les constantes d'intégration inconnues.

47. *Dans le cas II*, on pourrait procéder de la même manière. Mais, *la variable* θ' *tend lentement vers zéro avec* ε. Au contraire, θ est infiniment petit par rapport à toute puissance de θ'. On ne devrait donc garder dans le développement que les termes ne contenant pas θ. On obtiendrait de la sorte un développement fort incomplet et de *convergence asymptotique très lente*.

Dans ces conditions, il est préférable de *développer* Y *seulement suivant les puissances croissantes de* θ, variable tendant rapidement vers zéro. Ceci est pratiquement possible, parce que l'équation différentielle de raccordement est linéaire en s.

L'équation (32) s'écrit

$$(Y + U)\frac{dY}{ds} = -\theta'\left(1 + \theta\frac{s}{a}\right), \tag{119}$$

en posant

$$U = W + \zeta + B\theta s^2, \qquad W = Z_0 + s.$$

Posons

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n Y_n \tag{120}$$

et substituons dans (119). Nous avons d'abord

$$\theta'\frac{ds}{dY_0} + s = -Y_0 - Z_0 - \zeta;$$

d'où

$$s = Ce^{\frac{-Y_0}{\theta'}} + \theta' - Y_0 - Z_0 - \zeta. \tag{121}$$

La constante d'intégration C se calcule toujours par *comparaison des noyaux*. On a ensuite

$$\frac{dY_1}{ds}(Y_0 + W + \zeta) + Y_1\frac{dY_0}{ds} = -\theta'\frac{s}{a} - b_0 s^2\frac{dY_0}{ds}.$$

D'où l'on déduit Y_1 par des quadratures faciles, la constante d'intégration se déterminant toujours par comparaison des noyaux. En continuant ainsi, on peut calculer de proche en proche tous les coefficients Y_n. Chacun d'eux est une fonction de θ', ζ, s et peut être développé suivant les puissances de θ', ζ.

48. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours entre F_1 et M est donné par (115) en fonction des variables θ'_1, θ_1, ζ_1. Quand M est voisin de F, les coefficients T_{npq} peuvent être développés suivant les puissances de $\xi = \theta s$. En remplaçant θ par sa valeur en fonction de θ'_1 et θ_1, on obtient un développement en θ'_1, θ_1, ζ_1, dont les coefficients sont fonctions de s.

D'autre part, la formule (59) nous permet de calculer le développement de $\varepsilon\omega t$ suivant les variables θ', θ, ζ. Les coefficients de ce développement sont donnés par des quadratures introduisant des *constantes inconnues*. Ces constantes se déterminent en remplaçant θ', θ, ζ en fonction de θ'_1, θ_1, ζ_1 et *égalant les noyaux*.

Dans le cas II, il est préférable de poser

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{a}\theta(T_0 + \theta T_1 + \dots).$$

En utilisant la formule (59), on calcule les T_i par des quadratures, dont les constantes se déterminent comme ci-dessus par comparaison des noyaux.

49. *Cas où la fonction λ est holomorphe au voisinage d'un point frontière de première espèce.* — L'ordre r est nécessairement le même à droite et à gauche; en outre, il est entier et pair. On peut supposer $\sigma = -1$, $\sigma' = 1$, $\sigma'' = -1$ à droite et à gauche. Au n° 32, on avait pris $\sigma = \sigma' = \sigma'' = 1$. Pour rentrer dans la convention ci-dessus, il suffit donc, dans ce numéro et les suivants, de changer ξ en $-\xi$, s en $-s$, z en $-z$, Z en $-Z$, φ en $-\varphi$. Ceci entraîne le changement de B en $-B$, donc de b_{2i} en $-b_{2i}$, les b_{2i+1} restant inchangés.

Au n° 36, nous nous trouvons dans le deuxième cas. Mais, nous avons intérêt à prendre $Z_0 = z_0$, donc $\zeta = 0$; car, dans ce cas, la fonction z est la même à droite et à gauche du point frontière; on y suppose simplement $s < 0$ à droite et $s > 0$ à gauche.

CHAPITRE V.

CALCUL EXPLICITE DES PREMIERS TERMES DES DIFFÉRENTS DÉVELOPPEMENTS.

I. — Arc supérieur.

50. *Calcul de la déviation* (*cf.* n^{os} 24 à 27). — Nous calculerons seulement les deux premiers termes, ce qui nous donnera une *erreur du sixième ordre* :

$$D = A_0\theta(D_1 + \theta D_2 + \dots).$$

Nous allons calculer tout de suite les *noyaux* $N(H_0)$ et $N(H_1)$. On a (n° 25)

$$Z = \log s + \ldots, \qquad e^{-\varphi} = 1 + \frac{1}{s} + \ldots,$$

D'où

$$N(H_0) = N(Z) = \log s.$$

Pour avoir $N(H_1)$, nous devons calculer, dans le développement de Y_1, les termes de degrés *un* et zéro en s. Or, on a, d'après (56) et (63),

$$Y_1 = -\int_0^Z e^{-Z} s\left(\frac{W}{a} + b_0 s\right) dZ = \int_0^Z e^{-Z}[-\alpha_0 W^2 + \alpha_1 WZ - b_0 Z^2]\, dZ,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$\alpha_n = \frac{1}{a} + (n+1) b_0. \tag{122}$$

En remplaçant W par $e^Z - 1$, on a une intégrale élémentaire. On peut d'ailleurs intégrer les termes en e^{-Z} de 0 à $+\infty$. Remplaçons enfin, dans le résultat, e^Z par $s + 1 + Z$ et Z par $\log s$; puis, multiplions par $1 + \frac{1}{s}$; nous obtenons finalement, par un calcul facile,

$$N(H_1) = \alpha_1 \frac{\log^2 s}{2} + \alpha_0 \log s - 3\alpha_1.$$

Effectuons maintenant l'identification de l'équation (69). Pour simplifier l'écriture, posons

$$X = \xi(1 + B\xi) = \frac{b - \lambda}{A_0}.$$

Nous avons d'abord

$$D_1'(\xi) = \frac{x}{aX} = \frac{1}{\xi} + \ldots.$$

D'où, en utilisant $N(D_1) = N(H_0)$,

$$D_1(\xi) = \log s - P, \qquad \log s = \log \xi - \log \theta, \tag{123}$$

en posant

$$P = \int_0^\xi \left(\frac{1}{\xi} - \frac{x}{aX}\right) d\xi = \int_0^\xi \frac{1 + aB}{a(1 + B\xi)}\, d\xi. \tag{124}$$

On a ensuite

$$D_2'(\xi) = \frac{x(P - \log s)}{aX^2} = -\frac{\log s}{\xi^2} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \log s}{\xi} + \ldots.$$

En intégrant et utilisant $N(D_2) = N(H_1)$, on trouve

$$D_2(\xi) = \frac{1 + \log s}{\xi} + \alpha_1 \frac{\log^2 s}{2} + \alpha_0 \log s - 3\alpha_1 + P_1 + P_2 \log \theta, \tag{125}$$

en posant

$$P_1=\int_0^\xi\left[\frac{x(P-\log\xi)}{aX^2}+\frac{\log\xi}{\xi^2}-\frac{\alpha_0+\alpha_1\log\xi}{\xi}\right]d\xi, \tag{126}$$

$$P_2=\int_0^\xi\left[\frac{x}{aX^2}-\frac{1}{\xi^2}+\frac{\alpha_1}{\xi}\right]d\xi. \tag{127}$$

51. *Calcul du temps.* — On a (n° 28)

$$a\Theta_1=Z,\qquad aN(\Theta_1)=\log s;$$

$$a\Theta_2=H_1+\frac{1}{a}\int_0^Z s\,dZ=H_1+\frac{1}{a_4}\left(s-\frac{Z^2}{2}\right)\qquad aN(\Theta_2)=N(H_1)-\frac{\log^2 s}{2a},$$

$$aN(\Theta_2)=b_0\log^2 s+\alpha_0\log s-3\alpha_1.$$

Puis,

$$aT_1'(\xi)=\frac{1}{X}=\frac{1}{\xi}+\ldots;$$

d'où

$$aT_1=\log s-Q, \tag{128}$$

avec

$$Q=\int_0^\xi\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{X}\right)d\xi=\int_0^\xi\frac{B}{1+B\xi}\,d\xi. \tag{129}$$

Puis,

$$aT_2'(\xi)=\frac{P-\log s}{X^2}=\frac{-\log s}{\xi^2}+\frac{\alpha_0+2b_0\log s}{\xi}+\ldots,$$

d'où

$$aT_2=\frac{1+\log s}{\xi}+b_0\log^2 s+\alpha_0\log s-3\alpha_1+Q_1+Q_2\log 0, \tag{130}$$

avec

$$\begin{cases} Q_1=\displaystyle\int_0^\xi\left(\frac{P-\log\xi}{X^2}+\frac{\log\xi}{\xi^2}-\frac{\alpha_0+2b_0\log\xi}{\xi}\right)d\xi,\\ Q_2=\displaystyle\int_0^\xi\left(\frac{1}{X^2}-\frac{1}{\xi^2}+\frac{2b_0}{\xi}\right)d\xi. \end{cases} \tag{131}$$

En remplaçant ξ par a, ces formules permettent en particulier de calculer la *déviation au sommet supérieur* et le *temps de parcours total de l'arc supérieur*.

II. — Arc de seconde espèce.

52. *Calcul de la déviation.* — Nous avons d'abord, d'après (18) et avec les notations de la formule (79) :

$$R_1=\frac{x'}{\lambda'},\qquad R_2=\frac{x'(\lambda'-x\lambda'')}{\lambda'^4}+\ldots$$

Supposons maintenant que *l'ordre à droite du point frontière* F *de gauche soit* $r = 2$. Nous appliquons la formule (93) :

$$u = A_0\theta^2(W + \theta U_1 e^{\varphi} + \theta^2 U_2 e^{\varphi} + \dots). \tag{132}$$

Les formules (88) et (89) nous donnent d'abord

$$F_1 = \frac{s}{a}W - 3b_0 s^2 W^2, \qquad F_2 = -4b_1 s^3 W^2 + U_1 e^{\varphi}\left(\frac{s}{a} + \frac{U_1 e^{\varphi}}{W}\right). \tag{133}$$

La formule (87) donne ensuite

$$U_1 = \frac{M_1}{a} + b_0 M_2, \qquad U_2 = \frac{M_3}{a^2} + \frac{b_0}{a}M_4 + b_0^2 M_5 + b_1 M_6, \tag{134}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} M_1 &= \int_{\infty}^{\varphi} sW e^{-\varphi}\, d\varphi, & M_2 &= -3\int_{\infty}^{\varphi} s^2 W^2 e^{-\varphi}\, d\varphi, \\ M_3 &= \int_{\infty}^{\varphi} M_1\left(M_1\frac{e^{\varphi}}{W} + s\right) d\varphi, & M_4 &= \int_{\infty}^{\varphi} M_2\left(s + 2M_1\frac{e^{\varphi}}{W}\right) d\varphi, \\ M_5 &= \int_{\infty}^{\varphi} M_2^2\frac{e^{\varphi}}{W}\, d\varphi, & M_6 &= -4\int_{\infty}^{\varphi} s^3 W^2 e^{-\varphi}\, d\varphi. \end{aligned}\right. \tag{135}$$

En faisant $s = 0$, on obtient les coefficients M_i^0 permettant le calcul de la *déviation en* F. Nous donnerons leurs valeurs numériques dans un travail ultérieur.

53. *Calcul du temps.* — Nous appliquons d'abord la méthode du n° 31. Nous avons seulement besoin de connaître la constante Γ_0. On a, en affectant de l'indice *un* les données relatives au point frontière F_1 de droite,

$$a_1^2 K_0(X) = C;$$

d'où

$$\Gamma_0 = \frac{C}{a_1^2}\int_0^X e^{-X}(1 + Ce^{-X})\, dX = \frac{C(2+C)}{2a_1^2} = \frac{Z_0^2 - 1}{2a_1^2};$$

d'où

$$C_2 = \frac{1 - Z_0^2}{2A_1^4}.$$

On a ensuite

$$J_1 = \int_{a_1}^{x}\frac{dx}{x\lambda^3}, \qquad J_2 = \int_{a_1}^{x}\frac{dx}{x\lambda^{13}} + \frac{1}{3\lambda^{13}} + \frac{1 - 3Z_0^2}{6A_1^3}.$$

Appliquons maintenant la méthode du n° 35. Nous avons

$$J = \frac{\lambda_0}{a^2}\theta^2\left[-\int_0^s W\, ds + \theta\int_0^s\left(U_1 e^{\varphi} + \frac{2s}{a}W\right) ds + \dots\right].$$

Pour s très grand, la formule (84) nous donne

$$W = \frac{1}{2s}\left(1 - \frac{1}{4s^3} + \dots\right).$$

Le noyau de la première intégrale du crochet ci-dessus est donc

$$\frac{\log s}{2} + n_1, \qquad \text{avec} \quad n_1 = \int_0^1 W\,ds + \int_1^\infty \left(W - \frac{1}{2s}\right) ds.$$

D'après (134), la seconde intégrale s'écrit

$$\frac{1}{a}\int_0^s (2sW + M_1 e^{\varphi})\,ds + b_0 \int_0^s M_2 e^{\varphi}\,ds.$$

Le noyau de $\int_0^s 2sW\,ds$ est

$$n_2 = \int_0^\infty (2sW - 1)\,ds.$$

Pour calculer les noyaux de $\int_0^s M_1 e^{\varphi}\,ds$ et $\int_0^s M_2 e^{\varphi}\,ds$, il nous faut d'abord les développements asymptotiques des fonctions sous le signe $\int$. Ils nous sont donnés par la Note (D). Pour M_1, on a $m = 0$, $c_0 = \frac{1}{2}$; donc, $g_0 = -\frac{1}{2}$. Pour M_2, on a $m = 0$, $c_0 = -\frac{3}{4}$; donc, $g_0 = \frac{3}{4}$. Dès lors, les noyaux cherchés sont

$$n_3 = \int_0^\infty \left(M_1 e^{\varphi} + \frac{1}{2}\right) ds, \qquad n_4 = \int_0^\infty \left(M_2 e^{\varphi} - \frac{3}{4}\right) ds.$$

En réduisant les intégrales à leurs noyaux, nous avons donc

$$J = \frac{A_0}{a^2}\theta^2\left[-\frac{\log s}{2} - n_1 + \theta\left(\frac{n_2 + n_3}{a} + b_0 n_4\right) + \dots\right].$$

Calculons ensuite le noyau de J_1. Nous avons

$$\lambda' = A_0(2\xi + 3b_0\xi^2 + \dots), \qquad \frac{1}{x'\lambda'} = \frac{1}{2A_0 a\xi} + \dots.$$

D'où

$$N(J_1) = \frac{\log\xi}{2A_0 a} + N_1,$$

avec

$$N_1 = \int_{F_1}^{F} \left(\frac{1}{x'\lambda'} - \frac{1}{2A_0 a\xi}\right) dx.$$

Nous n'avons pas besoin de calculer le noyau de J_2, car nous laissons tomber le terme en ε^4 ou θ^6, puisque le développement est arrêté au terme en θ^4.

Finalement, l'intégrale J, prise de F_1 à F, vaut

$$(136)\qquad J=\frac{A_0}{2a^2}\theta^2(\log\theta-2n_1+N_1)+\frac{A_0}{a^2}\theta^4(n_2+n_3+ab_0n_4)+\dots.$$

La formule (26) nous permet ensuite de calculer le *temps de parcours de l'arc total.*

III. — Arc de première espèce. Cas $r=1$, $r_1>1$.

54. *Départ du point frontière.* — Nous sommes dans le cas I du n° 36. Nous allons calculer le développement de Y jusqu'aux termes du troisième degré en θ', θ, ζ.

En appliquant les formules du n° 22 et posant, pour simplifier l'écriture,

$$I_{np}=\int_0^s\frac{s^n}{W^p}ds,$$

on trouve aisément

$$Y_{100}=I_{01},\qquad Y_{110}=-\frac{I_{11}}{a}-b_0I_{22},\qquad Y_{101}=-I_{02},$$

$$Y_{120}=\frac{b_0-ab_1}{a}I_{32}+b_0^2I_{43},\qquad Y_{111}=\frac{I_{12}}{a}+2b_0I_{23},\qquad Y_{102}=I_{03},$$

$$Y_{200}=-\int_0^sY_{100}\frac{ds}{W^2},\qquad Y_{210}=\int_0^s\left(2b_0\frac{s^2}{W}Y_{100}+\frac{s}{a}Y_{100}-Y_{110}\right)\frac{ds}{W^2},$$

$$Y_{201}=\int_0^s\left(2\frac{Y_{100}}{W}-Y_{101}\right)\frac{ds}{W^2},$$

$$Y_{300}=-\int_0^s\left(Y_{100}\frac{dY_{200}}{ds}+Y_{200}\frac{dY_{100}}{ds}\right)\frac{ds}{W}=\int_0^s\left(\frac{Y_{100}^2}{W}-Y_{200}\right)\frac{ds}{W^2}.$$

Toutes ces intégrations sont faciles et *conduisent aux noyaux suivants*, où nous avons posé $\rho=\frac{s}{Z_0}$:

$$N(Y_{100})=\log\rho,\qquad N(Y_{110})=Z_0(\alpha_1\log\rho-b_0),$$

$$N(Y_{101})=-\frac{1}{Z_0},\qquad N(Y_{120})=Z_0^2\left[3(b_0\alpha_1-b_1)\log\rho+b_1-\frac{7}{2}b_0^2-\frac{b_0}{a}\right],$$

$$N(Y_{111})=\alpha_1\log\rho-\alpha_2,\qquad N(Y_{102})=\frac{1}{2Z_0^2},\qquad N(Y_{200})=-\frac{1}{Z_0},$$

$$N(Y_{210})=\alpha_1\frac{\log^2\rho}{2}+\alpha_0\log\rho-3\alpha_1,$$

$$N(Y_{201})=\frac{1}{Z_0^2},\qquad N(Y_{300})=\frac{1}{2Z_0^2}.$$

55. *Prolongement de l'arc.* — Avec les notations du n° 43, on trouve, en désignant par des accents les dérivées par rapport à ξ et posant

$$X = \xi(1 + B\xi) = \frac{\lambda - b}{A_0},$$

$$D'_{100} = \frac{x}{aX}, \qquad D'_{110} = -\frac{xZ_0}{aX^2}, \qquad D'_{101} = 0,$$

$$D'_{120} = \frac{xZ_0^2}{aX^3}, \qquad D'_{111} = -\frac{x}{aX^2}, \qquad D'_{102} = 0, \qquad D'_{200} = 0,$$

$$D'_{210} = -\frac{x D_{100}}{aX^2}, \qquad D'_{201} = 0, \qquad D'_{300} = 0.$$

En appliquant la méthode de la note (E) et tenant compte des noyaux ci-dessus, on trouve sans difficulté :

$$(137)\quad \begin{cases} D_{100} = \log v - P, \qquad D_{110} = Z_0\left(\frac{1}{\xi} + \alpha_1 \log v - b_0 - P_2\right), \qquad D_{101} = -\frac{1}{Z_0}; \\ D_{120} = Z_0^2\left[-\frac{1}{2\xi^2} + \frac{\alpha_2}{\xi} + 3(\alpha_1 b_0 - b_1)\log v + b_1 - \frac{7}{2}b_0^2 - \frac{b_0}{a} + P_3\right]; \\ D_{111} = \frac{1}{\xi} + \alpha_1 \log v - b_0 - P_2, \qquad D_{102} = \frac{1}{2Z_0^2}, \qquad D_{200} = -\frac{1}{Z_0}; \\ D_{210} = \frac{1 + \log v}{\xi} + \alpha_1 \frac{\log^2 v}{2} + \alpha_0 \log v - 3\alpha_1 + P_4 + (\log\theta + \log Z_0)P_2; \\ D_{201} = \frac{1}{Z_0^2}, \qquad D_{300} = \frac{1}{2Z_0^3}. \end{cases}$$

Dans ces formules, P, P_1 et P_2 sont les fonctions définies par les formules (124), (126) et (127); P_3 et P_4 ont les expressions suivantes :

$$(138)\quad \begin{cases} P_3 = \int_0^\xi \left[\frac{x}{aX^3} - \frac{1}{\xi^3} + \frac{\alpha_2}{\xi^2} + 3\frac{b_1 - \alpha_1 b_0}{\xi}\right] d\xi, \\ P_4 = \int_0^\xi \left[x\frac{P - \log\xi}{aX^2} + \frac{\log\xi}{\xi^2} - \frac{\alpha_1 \log\xi + \alpha_0}{\xi}\right] d\xi. \end{cases}$$

De plus, $v = \frac{\xi}{\theta Z_0}$.

56. *Calcul du temps.* — Avec les notations du N° 44, on trouve

$$\Theta_{100} = Y_{100}, \qquad \Theta_{110} = -b_0 I_{22}, \qquad \Theta_{101} = Y_{101}, \qquad \Theta_{120} = -b_1 I_{22} + b_0^2 I_{23},$$

$$\Theta_{111} = 2b_0 I_{23}, \qquad \Theta_{102} = Y_{102}, \qquad \Theta_{200} = Y_{200},$$

$$\Theta_{210} = Y_{210} - \frac{1}{a}\int_0^s s \log u \frac{ds}{W^2}, \qquad \Theta_{201} = Y_{201}, \qquad \Theta_{300} = Y_{300}.$$

Les noyaux résultent tous des calculs faits au numéro précédent; nous les reproduisons dans l'ordre correspondant à l'ordre ci-dessus :

$$\log\varphi,\quad Z_0 b_0(2\log\varphi-1),\quad -\frac{1}{Z_0},\quad Z_0^2\left[3(2b_0^2-b_1)\log\varphi+b_1-\frac{7}{2}b_0^2\right].$$

$$b_0(2\log\varphi-3),\quad \frac{1}{2Z_0^2},\quad -\frac{1}{Z_0},\quad b_0\log^2\varphi+\alpha_0\log\varphi-2\alpha_2,\quad \frac{1}{Z_0^2},\quad \frac{1}{2Z_0^2}.$$

En appliquant la formule (116), utilisant les dérivées $D'_{np,q}(\xi)$ calculées au numéro précédent, puis appliquant la méthode de la Note (E) et utilisant les noyaux ci-dessus, on trouve sans difficulté;

$$(139)\quad \left\{\begin{array}{l} T_{100}=\log\varphi-Q,\qquad T_{110}=Z_0\left(\frac{1}{\xi}+2b_0\log\varphi-b_0-Q_2\right),\qquad T_{101}=-\frac{1}{Z_0};\\ \qquad T_{120}=Z_0^2\left[-\frac{1}{2\xi^2}+\frac{3b_0}{\xi}+3(2b_0^2-b_1)\log\varphi+b_1-\frac{7}{2}b_0^2+Q_3\right];\\ T_{111}=\frac{1}{\xi}+2b_0\log\varphi-3b_0-Q_2,\qquad T_{102}=\frac{1}{2Z_0^2},\qquad T_{200}=-\frac{1}{Z_0};\\ T_{210}=\frac{1+\log\varphi}{\xi}+b_0\log^2\varphi+\alpha_0\log\varphi-2\alpha_2+Q_1+(\log\theta+\log Z_0)Q_2;\\ \qquad T_{201}=\frac{1}{Z_0^2},\qquad T_{300}=\frac{1}{2Z_0^2}. \end{array}\right.$$

Dans ces formules, Q, Q_1 et Q_2 sont les fonctions définies par les formules (129) et (131); de plus,

$$(140)\qquad Q_3=\int_0^{\xi}\left[\frac{1}{X^3}-\frac{1}{\xi^3}+\frac{3b_0}{\xi^2}+3\frac{b_1-2b_0^2}{\xi}\right]d\xi.$$

IV. — Arc de première espèce. Cas $r=r_1=1$.

57. *Calcul de la déviation.* — Nous nous bornerons à calculer le développement jusqu'aux termes du second ordre(1) en θ,ζ. Nous avons les formules (95). Nous déterminons ensuite la fonction φ par la condition qu'elle s'annule avec s; de sorte que

$$e^{\varphi}=kW\,e^{-Z},\qquad k=\frac{e^{Z_0}}{Z_0},\qquad W=Z+s=Ce^{Z}-1.$$

Nous avons ensuite, par les formules (55) et (56),

$$Y_{01}=1-e^{\varphi},\qquad Y_{10}=k\int_{Z_0}^{Z}(-\alpha_0W^2+\alpha_1WZ-b_0Z^2)\,e^{-Z}\,dZ.$$

L'intégrale ci-dessus est élémentaire. On a ensuite, en posant (114),

$$D_{00}=Z,\qquad D_{01}=e^{-\varphi},\qquad D_{10}=Y_{10}\,e^{-\varphi}.$$

(1) On peut assez facilement calculer les coefficients des termes du troisième ordre; mais, le calcul de leurs noyaux paraît compliqué.

Pour calculer les noyaux, nous utilisons la formule

$$Z = \log u + \frac{v}{s} + \dots, \qquad u = \frac{s}{C}, \qquad v = 1 + \log u;$$

d'où

$$e^{-\varphi} = \frac{1}{kC}\left(1 + \frac{1}{s} + \dots\right).$$

On trouve, par un calcul facile et en posant $Z_0 + 1 = m$,

$$N(D_{00}) = \log u, \qquad N(D_{01}) = \frac{Z_0}{m},$$
$$N(D_{10}) = \alpha_1 \frac{\log^2 u}{2} + \alpha_0 \log u - \alpha_1\left(\frac{Z_0^2}{2} + Z_0 + 2 + \frac{1}{m}\right).$$

On a ensuite, par l'équation (10) et en utilisant une notation du n° 55,

$$D'_{00} = \frac{x}{aX}, \qquad D'_{01} = 0, \qquad D'_{10} = -D_{00}\frac{x}{aX^2}.$$

En appliquant la Note (E) et utilisant les noyaux ci-dessus, on trouve aisément

$$(141) \qquad \begin{cases} D_{00} = \log u - P, \qquad D_{01} = \dfrac{Z_0}{m}, \\ D_{10} = \alpha_1 \dfrac{\log^2 u}{2} + \alpha_0 \log u + \dfrac{1 + \log u}{\zeta} \\ \qquad - \alpha_1\left(\dfrac{Z_0^2}{2} + Z_0 + 2 + \dfrac{1}{m}\right) + P_4 + (\log\theta + \log m - Z_0)P_2. \end{cases}$$

Dans ces formules, u doit être remplacé par $\frac{\xi e^{Z_0}}{\theta m}$, de sorte que

$$\log u = \log\xi + Z_0 - \log\theta - \log m.$$

En outre, P, P_2, P_4 sont les fonctions définies par (124), (127), (138).

58. *Calcul du temps.* — La formule (59) nous donne immédiatement, avec les notations du n° 44,

$$\Theta_{00} = Z - Z_0, \qquad \Theta_{10} = Y_{10}e^{-\varphi} + \frac{1}{a}\int_{Z_0}^{Z} s\,dZ, \qquad \Theta_{01} = Y_{01}e^{-\varphi} = e^{-\varphi} - 1.$$

D'où, en utilisant les noyaux calculés précédemment,

$$N(\Theta_{00}) = \log u - Z_0, \qquad N(\Theta_{01}) = -\frac{1}{m},$$
$$N(\Theta_{10}) = b_0 \log^2 u + \alpha_0 \log u - b_0 Z_0^2 - \alpha_1\left(Z_0 + 2 + \frac{1}{m}\right).$$

On a ensuite, par la formule (116),

$$T'_{00} = \frac{1}{X}, \qquad T'_{01} = 0, \qquad T'_{10} = -\frac{D_{00}}{X^2} = \frac{P - \log u}{X^2}.$$

En appliquant la note (E) et tenant compte des noyaux ci-lessus, on trouve facilement

$$T_{00}=\log u-Z_0-Q,\qquad T_{01}=-\frac{1}{m},$$

$$T_{10}=b_0\log^2 u+\alpha_0\log u+\frac{1+\log u}{\zeta}$$
$$-b_0Z_0^2-\alpha_1\left(Z_0+2+\frac{1}{m}\right)+Q_1+(\log\theta+\log m-Z_0)Q_2,$$

où Q, Q_1, Q_2 sont toujours définis par (129) et (131).

V. — Arc de première espèce. Cas $r=r_1=2$.

59. *Calcul de la déviation.* — On a

$$r'=\frac{2}{3},\qquad \varepsilon^2=\frac{A_0^2}{a}\theta^3,\qquad D=A_0\theta^2 z,\qquad W=Z+s^2.$$

La formule (100) devient

$$\frac{W}{s^2}=1+\frac{H}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{H}{3s^5}+\dots;$$

d'où

$$\frac{1}{W^2}=\frac{1}{s^4}\left(1-\frac{2H}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\dots\right).$$

Déterminons la fonction φ par la condition qu'elle s'annule pour $s=\infty$; on a, pour s très grand,

$$\varphi=-\frac{1}{3s^3}+\frac{2H}{5s^5}-\frac{1}{3s^6}+\dots.$$
$$e^{\varphi}=1-\frac{1}{3s^3}+\frac{2H}{5s^5}+\dots,\qquad e^{-\varphi}=1+\frac{1}{3s^3}-\frac{2H}{5s^5}+\dots.$$

Les formules (54) à (58) donnent, en appelant φ_0 la valeur de φ pour $s=0$ et posant $e^{\varphi_0}=K$,

$$Y_{01}=K-e^{\varphi},\qquad Y_{10}=-\frac{I_1}{a}-b_0I_2,\qquad Y_{02}=K^2I_3,$$
$$Y_{11}=K\left(\frac{I_4}{a}+2b_0I_5\right),\qquad Y_{20}=-b_1I_6+\frac{I_7}{a^2}+\frac{b_0}{a}I_8+b_0^2I_9,$$

en posant

$$I_1=\int_0^s\frac{s\,e^{\varphi}}{W}ds,\qquad I_2=\int_0^s\frac{s^3\,e^{\varphi}}{W^2}ds,\qquad I_3=\int_0^s\frac{e^{-\varphi}}{W^3}ds,\qquad I_4=\int_0^s\left(s-\frac{2I_1e^{-\varphi}}{W}\right)\frac{ds}{W^2},$$
$$I_5=\int_0^s\frac{s^3-I_2e^{-\varphi}}{W^3}ds,\qquad I_6=\int_0^s\frac{e^{\varphi}s^4}{W^2}ds,\qquad I_7=\int_0^s\frac{I_1(I_1e^{-\varphi}-sW)}{W^3}ds,$$
$$I_8=\int_0^s(s^3-I_2e^{-\varphi})(sW\,e^{\varphi}-2I_1)\frac{ds}{W^3},\qquad I_9=\int_0^s e^{\varphi}(s^3-I_2e^{-\varphi})^2\frac{ds}{W^3}.$$

Il faut avoir les *noyaux de toutes ces intégrales*. En utilisant la Note (B) et les développements ci-dessus, on trouve facilement

$$N(I_1)=\log s+n_1,\qquad n_1=\int_0^1 \frac{s\,e^{\varphi}}{W}\,ds+\int_1^\infty\left(\frac{s\,e^{\varphi}}{W}-\frac{1}{s}\right)ds;$$

$$N(I_2)=\log s+n_2,\qquad n_2=\int_0^1 \frac{s^3\,e^{\varphi}}{W^2}\,ds+\int_1^\infty\left(\frac{s^3\,e^{\varphi}}{W^2}-\frac{1}{s}\right)ds;$$

$$N(I_6)=n_6=\int_0^\infty\left(\frac{e^{\varphi}s^4}{W^2}-1\right)ds,\qquad N(I_8)=n_8=\int_0^\infty\left[\frac{(s^3-I_2\,e^{-\varphi})\,(sW\,e^{\varphi}-2I_1)}{W^3}-1\right]ds;$$

$$N(I_9)=n_9=\int_0^\infty\left[\frac{e^{\varphi}(s^3-I_2\,e^{-\varphi})^2}{W^3}-1\right]ds;$$

$$N(I_3)=n_3,\qquad N(I_4)=n_4,\qquad N(I_5)=n_5,\qquad N(I_7)=n$$

sont les valeurs finies que prennent les intégrales correspondantes pour $s=\infty$.

Avec les notations de la formule (114), on a ensuite

$$D_{00}=Z,\qquad N(D_{00})=H,\qquad D_{01}=1+Y_{01}\,e^{-\varphi}=K\,e^{-\varphi},\qquad N(D_{01})=K;$$

puis

$$D_{np}=Y_{np}\,e^{-\varphi},\qquad N(D_{np})=N(Y_{np}),$$

car le développement de chaque Y_{np} ne contient aucune puissance positive de s.

En utilisant les résultats précédents, *on a les noyaux de tous les* D_{np}. Pour faire le prolongement, nous utilisons l'équation (10). En identifiant, on trouve que toutes les dérivées D'_{np} sont nulles, sauf

$$D'_{10}=\frac{x}{a\xi^2(1+B\xi)}.$$

On en déduit que tous les D_{np} sont égaux à leurs noyaux, sauf D_{10}, qui se calcule par la Note (E). On obtient ainsi

$$D_{00}=H,\qquad D_{10}=-\frac{1}{\xi}+\alpha_0(\log\theta-\log\xi)-\frac{n_1}{a}-b_0n_2+P_5,\qquad D_{01}=K,$$

$$D_{20}=-b_1n_6+\frac{n_7}{a^2}+\frac{b_0}{a}n_8+b_0^2n_9,\qquad D_{11}=K\left(\frac{n_4}{a}+2b_0n_5\right),\qquad D_{02}=K^2n_3;$$

avec

$$P_5=\int_0^\xi\left[\frac{x}{a\xi^2(1+B\xi)}-\frac{1}{\xi^2}+\frac{\alpha_0}{\xi}\right]d\xi.$$

60. *Calcul du temps.* — Avec les notations du n° 44, on a, en se reportant à la formule (59) et supposant les D_{np} exprimés en fonction de s :

$$\Theta_{00}=Z-Z_0,\qquad \Theta_{10}=D_{10}+\frac{1}{a}\int_0^s sD'_{00}\,ds=D_{10}+\frac{1}{a}\int_0^s\frac{s}{W}\,ds,\qquad \Theta_{01}=D_{01}-1,$$

$$\Theta_{20}=D_{20}+\int_0^s\frac{s}{a}\left(D'_{10}+\frac{s}{a}D'_{00}\right)ds=D_{20}+\frac{1}{a^2}\int_0^s sI_1\,e^{-\varphi}\frac{ds}{W^2}+\frac{b_0}{a}\int_0^s\frac{s}{W^2}(I_2\,e^{-\varphi}-s^3)\,ds.$$

$$\Theta_{11}=D_{11}+\frac{1}{a}\int_0^s sD'_{01}\,ds=D_{11}-\frac{K}{a}\int_0^s e^{-\varphi}\frac{s\,ds}{W^2},\qquad \Theta_{02}=D_{02}.$$

D'où l'on déduit

$$N(\Theta_{00}) = H - Z_0,$$
$$N(\Theta_{10}) = N(D_{10}) + \frac{\log s}{a} + \frac{n_{10}}{a} = -b_0 \log s + \frac{n_{10} - n_1}{a} - b_0 n_2,$$
$$N(\Theta_{01}) = K - 1,$$
$$N(\Theta_{20}) = N(D_{20}) + \frac{n_{11}}{a^2} + \frac{b_0}{a} n_{12} = -b_1 n_6 + b_0^2 n_9 + \frac{n_7 + n_{11}}{a^2} + \frac{b_0}{a}(n_8 + n_{12});$$
$$N(\Theta_{11}) = N(D_{11}) - \frac{K}{a} n_{13} = \frac{K}{a}(n_4 - n_{13}) + 2K b_0 n_5,$$
$$N(\Theta_{02}) = K^2 n_3,$$

où l'on a posé

$$n_{10} = \int_0^1 \frac{s}{W}\, ds + \int_0^\infty \left(\frac{s}{W} - \frac{1}{s}\right) ds, \qquad n_{11} = \int_0^\infty s I_1 e^{-\varphi} \frac{ds}{W^2},$$
$$n_{12} = \int_0^\infty s I_2 e^{-\varphi} \frac{ds}{W^2} + \int_1^\infty \left(1 - \frac{s^4}{W^2}\right) ds, \qquad n_{13} = \int_0^\infty e^{-\varphi} \frac{s\, ds}{W^2}.$$

La formule (116) nous montre ensuite, en tenant compte du numéro précédent, que les T_{np} sont constants, donc égaux aux $N(\Theta_{np})$ correspondants, sauf T_{10}, dont la dérivée est

$$T'_{10} = \frac{1}{\zeta^2(1 + B\zeta)}.$$

On en déduit

$$T_{10} = -\frac{1}{\zeta} + b_0(\log\theta - \log\zeta) + \frac{n_{10} - n_1}{a} - b_0 n_2 + Q_4,$$

avec

$$Q_4 = \int_0^\zeta \left[\frac{1}{\zeta^2(1 + B\zeta)} - \frac{1}{\zeta^2} + \frac{b_0}{\zeta}\right] d\zeta.$$

VI. — Arc de première espèce. Cas $r = 2$, $r_1 < 2$.

61. *Calcul de la déviation.* — Nous appliquons la méthode du n° 41, en poussant le développement de Y jusqu'aux termes du second degré en θ, ζ, comme précédemment. On a d'abord, en procédant à l'identification de (108),

$$(142)\quad \left\{ \begin{array}{c} WX_{10} = -S_{10}, \qquad WX_{01} = -S_{01}, \\ WX_{20} = -\frac{W'}{2} X_{10}^2 - S_{20} - S'_{10} X_{10}, \qquad WX_{02} = -\frac{W'}{2} X_{01}^2 - S_{02} - S'_{01} X_{01}, \\ WX_{11} = -W' X_{10} X_{01} - S_{11} - S'_{10} X_{01} - S'_{01} X_{10}. \end{array} \right.$$

On peut ensuite calculer U_{10}, U_{01}, U_{20}, U_{11} et U_{02} par des quadratures: voici les dérivées :

$$(143)\quad \begin{cases} U'_{10} = S e^{-\psi}\left(\dfrac{W}{a} + b_0 S^2\right), \qquad U'_{01} = e^{-\psi}, \\ U'_{20} = \dfrac{1}{a}\left[(W + 2S^2)U_{10} + S^2 e^{-\psi}\left(\dfrac{W}{a} + b_0 S^2\right)\right] + U_{10}^2 e^{\psi} + 3 b_0 S^2 U_{10} + b_1 S^4 e^{-\psi}, \\ U'_{11} = \dfrac{1}{a}[(W + 2S^2)U_{01} + S e^{-\psi}] + 2 U_{10} U_{01} e^{\psi} + 3 b_0 S^2 U_{01}, \qquad U'_{02} = U_{01}^2 e^{\psi}. \end{cases}$$

Nous aurons seulement besoin de connaître l'ordre infinitésimal de ces fonctions par rapport à Z, quand Z est infiniment petit.

Abordons maintenant le calcul des constantes Γ_{np} au moyen de la formule (107). A cet effet, reprenons les intégrales I_n du n° 59. On a, avec la notation de Landau,

$$I_1 = k\int_0^Z SW e^{-\psi}\, dZ = o(Z^4),$$

car $S = o(Z^2)$ et $W = o(Z)$. Puis

$$I_2 = k\int_0^Z S^3 e^{-\psi}\, dZ = o(Z^7).$$

Donc,

$$I_{10}(Z) = -\frac{I_1}{a} - b_0 I_2 = o(Z^4).$$

D'autre part,

$$WX_{10} = -S_{10} = -U_{10} e^{\psi}.$$

Or, $U'_{10} = o(Z^3)$; donc, $U_{10} = o(Z^4)$; $WX_{10} = o(Z^4)$; d'où $\Gamma_{10} = 0$.

Prenons ensuite

$$I_{01} = -e^{\psi} = -kWe^{-\psi} = o(Z).$$

On a, d'autre part,

$$WX_{01} = -S_{01} = -U_{01} e^{\psi} = o(Z);$$

donc, $\Gamma_{01} = 0$ et par suite $X_{01} = -1$, ce que l'on peut vérifier facilement en dérivant $U_{01} = We^{-\psi}$.

On vérifie ensuite facilement, en procédant comme pour I_1 et I_2, que

$$I_6 = o(Z^9), \qquad I_7 = o(Z^8), \qquad I_8 = o(Z^9), \qquad I_9 = o(Z^{12});$$

d'où $I_{20} = o(Z^6)$.

D'autre part, $X_{10} = o(Z^3)$, $S'_{10} = o(Z^3)$ et, d'après (143), $U'_{20} = o(Z^5)$; d'où $U_{20} = o(Z^6)$. Donc, d'après (142), $WX_{20} = o(Z^6)$; d'où $\Gamma_{20} = 0$.

On a maintenant, par (58),

$$\frac{dY_{11}}{ds} = \frac{Y_{10}}{W}\left(\frac{Y_{01}}{W^2} - \frac{dY_{01}}{ds}\right) + \frac{Y_{01}}{W}\left(\frac{Y_{10}}{W^2} - \frac{dY_{10}}{ds}\right).$$

Or, $Y_{01}=I_{01}=-e^{\varphi}$; donc, la première parenthèse est nulle. D'autre part, $Y_{01}=1+Y_{01}e^{-\varphi}=0$. Il s'ensuit que $\frac{dY_{11}}{ds}=0$; d'où $Y_{11}=\Gamma_{11}$. La cinquième formule (142) nous donne

$$WX_{11}=W'X_{10}-S_{11}+S'_{10}-W'X_{10}=-S_{11}+S'_{10}=o(Z^3); \qquad \text{donc} \quad \Gamma_{11}=0.$$

On a enfin, par (58), et en tenant compte des résultats précédents, $\frac{dY_{20}}{ds}=0$; donc $Y_{02}=\Gamma_{02}$. D'autre part, (142) nous donne

$$WX_{02}=\frac{W'}{2}-S_{02}.$$

Or,

$$U'_{02}=W^2e^{-\psi}=o(Z^2), \qquad U_{02}=o(Z^3), \qquad S_{02}=o(Z^3);$$

donc, WX_{02} tend vers $\frac{1}{2}$ quand Z tend vers zéro. Donc, $\Gamma_{02}=\frac{k}{2}$. On en déduit

$$X_{02}=\frac{e^{\psi}}{2W} \qquad \text{et} \qquad U_{02}=\frac{e^{-\psi}(1+2SW)-1}{2};$$

cette dernière formule est facile à vérifier par dérivation.

En définitive, on peut garder les valeurs de Y_{10} et Y_{20} trouvées dans la section précédente, comme on le savait *a priori*, d'après la remarque du n° 42. Par contre, Y_{01}, Y_{11} et Y_{02} sont remplacés par $-e^{\varphi}$, 0 et $\frac{k}{2}$. On en conclut que D_{10} et D_{20} ne changent pas; mais, on a

$$D_{01}=1+Y_{01}e^{-\varphi}=0, \qquad D_{11}=0, \qquad D_{02}=\frac{k}{2}e^{-\varphi}, \qquad N(D_{02})=\frac{k}{2}.$$

Dès lors, *dans les formules du n° 59, il nous suffit de remplacer* D_{01} *et* D_{11} *par zéro et* D_{02} *par* $\frac{k}{2}$.

62. *Calcul du temps.* — Appliquons la méthode du n° 44. On a

$$\Theta_0=X, \qquad \Theta_1=\frac{1}{a}\int_0^X S\,dX, \qquad \Theta_2=\frac{1}{a}\int_0^X\left(S_{10}+\frac{S^2}{a}\right)dX.$$

En remplaçant X par $Z+\theta X_{10}+\zeta X_{01}+\dots$, on obtient d'abord

$$\Theta_{00}=Z, \qquad \Theta_{01}=X_{01}=-1, \qquad \Theta_{02}=X_{02}=\frac{e^{\psi}}{2W}=\frac{k}{2}e^{-\varphi}.$$

Puis

$$\Theta_1(X)=\Theta_1(Z)+\frac{S(Z)}{a}(\theta X_{10}+\zeta X_{01})+\dots;$$

d'où

$$\Theta_{10}=X_{10}+\Theta_1(Z), \qquad \Theta_{11}=X_{11}+\frac{S(Z)}{a}X_{01}=X_{11}-\frac{S(Z)}{a}.$$

Enfin

$$\Theta_{20}=X_{20}+\frac{S(Z)}{a}X_{10}+\Theta_2(Z).$$

D'autre part, revenons aux formules données au début du n° 60. Nous pouvons prendre, avec la notation du n° 44, $K_{00}=Z$, donc $C_{00}=0$. Puis, $K_{01}=0$, puisque $D_{01}=0$. On en conclut que $C_{01}=-1$.

On a ensuite

$$K_{02}=\frac{k}{2}e^{-\varphi}, \qquad \text{d'où} \qquad C_{02}=0.$$

Puis

$$K_{10}=D_{10}+\frac{1}{a}\int_0^Z s\,dZ$$

tend vers zéro avec Z.

D'autre part (n° 61) $X_{10}=o(Z^3)$ et $\Theta_1(Z)=o(Z^3)$. On en conclut que $C_{10}=0$.

Puis, $K_{11}=0$, car $D_{11}=D_{01}=0$. D'autre part (n° 61), $X_{11}=o(Z^2)$ et $S(Z)=o(Z^2)$. Donc, $C_{11}=0$.

Enfin, on peut prendre K_{20} égal a Θ_{02} du n° 60; il tend vers zéro avec Z. D'autre part, X_{20}, $S(Z)X_{10}$ et $\Theta_2(Z)$ tendent aussi vers zéro; donc, $C_{20}=0$.

En définitive, Θ_{00}, Θ_{10} et Θ_{20} sont les mêmes qu'au n° 60, comme on le savait *a priori*; mais

$$\Theta_{01}=-1, \qquad \Theta_{11}=0, \qquad \Theta_{02}=\frac{k}{2}e^{-\varphi}, \qquad N(\Theta_{02})=\frac{k}{2}.$$

Donc, T_{00}, T_{10} et T_{20} sont les mêmes qu'au n° 60; mais

$$T_{01}=-1, \qquad T_{11}=0, \qquad T_{02}=\frac{k}{2}.$$

VII. — Arc de première espèce limité a gauche par un point frontière F de deuxième espèce et a droite par un point frontière de première espèce, dont l'ordre est $r_1=2$, a droite et a gauche.

63. *Calcul de la déviation.* — Nous appliquons la méthode du n° 46. On a

$$r_1=2, \qquad \beta=\frac{4}{3}, \qquad \theta'=k\theta_1, \qquad \theta=k'\theta_1^2,$$

avec

$$k=\frac{aA_1^{\frac{2}{3}}}{A_0^2 a_1^{\frac{1}{3}}}, \qquad k'=\frac{A_1^{\frac{4}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}}}, \qquad kk'=\frac{aA_1^2}{a_1 A_0^2}. \tag{144}$$

Au n° 59, on a calculé les coefficients du développement

$$D=A_1\theta_1^2(D_{00}+D_{10}\theta_1+D_{01}\zeta_1+D_{20}\theta_1^2+D_{11}\theta_1\zeta_1+D_{02}\zeta_1^2+\dots). \tag{145}$$

Ces coefficients sont *tous constants*, sauf

$$D_{10}=\frac{1}{x-a_1}+\alpha_0\log\frac{\theta_1}{a_1-x}-\frac{a_1}{a_1}-b_0'a_2+P_3.$$

avec

$$P_5=\int_{a_1}^{x}\left[-\frac{A_1}{a_1(\lambda-b)}+\frac{1}{(x-a_1)^2}+\frac{\alpha_0}{x-a_1}\right]dx.$$

Au voisinage de F, nous avons $x=a+\xi$ et $\lambda-b=A_0\xi(1+B\xi)$. Calculons le noyau de D_{10}. Pour les deux premiers termes, il suffit de remplacer x par a. Les deux suivants sont constants. Pour P_5, la partie principale du crochet est $-\frac{aA_1}{a_1A_0\xi}$. On en déduit

$$N(D_{10})=C-\frac{A_1a}{a_1A_0}\log\frac{\xi}{a_1-a}, \tag{146}$$

avec

$$C=\frac{1}{a-a_1}+\alpha_0\log\frac{\theta_1}{a_1-a}-\frac{n_1}{a_1}-b_0^1n_2 \tag{147}$$
$$+\int_{a_1}^{a}\left[-\frac{A_1x}{a_1(\lambda-b)}+\frac{aA_1}{a_1A_0\xi}+\frac{1}{(x-a_1)^2}+\frac{\alpha_0}{x-a_1}\right]dx.$$

On a maintenant

$$z=\frac{D}{A_0\theta}=\frac{A_1}{A_0k'}(D_{00}+\dots). \tag{148}$$

D'où

$$Z_0=\frac{A_1D_{00}}{A_0k'}.$$

En prenant la partie constante de z_0-Z_0, on obtient

$$\zeta=\frac{A_1}{A_0k'}(D_{01}\zeta_1+D_{20}\theta_1^2+D_{11}\theta_1\zeta_1+D_{02}\zeta_1^2+\dots).$$

Il s'agit maintenant de calculer les coefficients $Y_{npq}(s)$ de la formule (50). En tenant compte de la limitation adoptée pour le développement (145), nous devons seulement calculer Y_{100} et Y_{101}. La formule (51) se réduit à

$$Y_1=\int\frac{ds}{W+\zeta}=\int\frac{ds}{W}\left(1-\frac{\zeta}{W}+\dots\right).$$

En remarquant que la formule (40) nous donne $W=-s-Z_0$, on a donc

$$Y_{100}=\int\frac{ds}{W}=-\log(s+Z_0)+C', \qquad N(Y_{100})=-\log s+C'$$

et

$$Y_{101}=-\int\frac{ds}{W^2}=\frac{1}{s+Z_0}+C'', \qquad N(Y_{101})=C''.$$

Nous avons maintenant

$$z=Z_0+\zeta+\theta'Y_{100}+\theta'\zeta Y_{101}+\dots.$$

En comparant avec (148), nous obtenons

$$\frac{A_1}{A_0 k'} D_{10}\theta_1 = \theta' Y_{100} + \theta'\zeta Y_{101} + \ldots = k\theta_1 Y_{100} + k\theta_1 \frac{A_1 D_{01}\zeta_1}{A_0 k'} Y_{101} - \ldots.$$

On doit donc avoir

$$kN(Y_{100}) = \frac{A_1}{A_0 k'} N(D_{10}) \qquad \text{et} \qquad N(Y_{101}) = 0.$$

On a d'abord $C'' = 0$. Puis, en se reportant à (146) et (144),

$$C - \frac{A_1 a}{A_0 a_1} \log \frac{s\theta}{a_1 - a} = \frac{a A_1}{a_1 A_0}(C' - \log s).$$

On vérifie que s disparaît et l'on a

$$C' = \frac{a_1 A_0}{a A_1} C + \log \frac{a_1 - a}{\theta}.$$

La déviation nous est maintenant donnée par la formule

$$D = A_0\theta(Z_0 + \zeta) + A_0\theta\theta'\left[\frac{a_1 A_0}{a A_1} C + \log \frac{a_1 - a}{\theta(s + Z_0)}\right] + \ldots,$$

qui *se déduit de* (145) *en remplaçant simplement* D_{10} *par le noyau* (146), *dans lequel la variable* ξ *est elle-même remplacée par* $\theta(s + Z_0)$, *au lieu de* θs. En particulier, la *déviation au point frontière* est obtenue pour $s = 0$, c'est-à-dire *en remplaçant* ξ *par* θZ_0 *dans* (146).

64. *Calcul du temps.* — Au n° 60, on a calculé les coefficients du développement

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_1}{a_1}\theta_1^2(T_{00} + T_{10}\theta_1 + T_{01}\zeta_1 + T_{20}\theta_1^2 + T_{11}\theta_1\zeta_1 + T_{02}\zeta_1^2 + \ldots). \tag{149}$$

Ces coefficients sont *tous constants*, sauf

$$T_{10} = \frac{1}{x - a_1} + b_0^1 \log \frac{\theta_1}{a_1 - x} + \frac{n_{10} - n_1}{a_1} - b_0^1 n_2 + Q_1,$$

avec

$$Q_1 = \int_{a_1}^{x}\left[\frac{-A_1}{\lambda - b} + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{b_0^1}{x - a_1}\right] dx.$$

Le noyau de T_{10} se calcule comme au n° 63 et vaut

$$N(T_{10}) = \Gamma - \frac{A_1}{A_0}\log\frac{\xi}{a_1 - a}, \tag{150}$$

avec

$$\Gamma = \frac{1}{a - a_1} + b_0^1 \log \frac{\theta_1}{a_1 - a} - \frac{n_{10} - n_1}{a_1} - b_0^1 n_2 + \int_{a_1}^{a}\left[-\frac{A_1}{\lambda - b} + \frac{A_1}{A_0 \xi} + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{b_0^1}{x - a_1}\right] dx.$$

D'autre part, la formule (59) nous donne

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{a}\theta\int\left(\theta'\frac{dY_{100}}{ds}+\dots\right)ds = \Gamma' + \frac{A_0}{a}\theta\theta'[\Gamma'' - \log(s+Z_0)]+\dots.$$

Γ' et Γ'' désignant deux constantes inconnues. La première est égale à la partie constante de (149). La seconde s'obtient en égalant les noyaux des coefficients de θ_1^3 dans les deux développements :

$$\frac{A_1}{a_1}\left[\Gamma - \frac{A_1}{A_0}\log\frac{\theta s}{a_1 - a}\right] = \frac{A_0}{a}kk'(\Gamma'' - \log s) = \frac{A_1^2}{a_1 A_0}(\Gamma'' - \log s).$$

On vérifie encore que s disparaît et l'on a

$$\Gamma'' = \log\frac{a_1 - a}{\theta} + \frac{A_0}{A_1}\Gamma.$$

Le temps de parcours de F_1 à M nous est maintenant donné par la formule

$$\varepsilon\omega t = \Gamma' + \frac{A_0}{a}\theta\theta'\left[\log\frac{a_1 - a}{\theta(s+Z_0)} + \frac{A_0}{A_1}\Gamma\right]+\dots$$

qui *se déduit de* (149) *en remplaçant* T_{10} *par le noyau* (150), *dans lequel la variable* ξ *est elle-même remplacée par* $\theta(s+Z_0)$, *au lieu de* θs.

En particulier, le *temps de parcours de l'arc total* est obtenu pour $s = 0$, c'est-à-dire *en remplaçant* ξ *par* θZ_0.

VIII. — Arc de première espèce limité a gauche par un point frontière de deuxième espèce et a droite par un point frontière de première espèce, dont l'ordre est $r_1 = 1$, a droite et a gauche.

65. *Calcul de la déviation.* — Nous sommes dans le cas II du n° 45. Au n° 57, nous avons calculé le développement

$$D = A_1\theta_1(D_{00} + D_{10}\theta_1 + D_{01}\zeta_1 + \dots), \tag{151}$$

dont les coefficients sont donnés par les formules (141). Calculons leurs noyaux.

Nous appelons Z_1 la quantité appelée Z_0 au n° 57. Pour simplifier l'écriture, posons

$$\begin{cases} k = \dfrac{A_1 a}{A_0 a_1}, \qquad k' = k\dfrac{A_1}{A_0}, \qquad a' = a_1 - a, \qquad h = Z_1 + \log\dfrac{a'}{m\theta_1}, \\ h' = \log a' - h = \log(m\theta_1) - Z_1, \qquad \beta_n = \dfrac{1}{a} - (n+1)b_0, \qquad \mu = \dfrac{\xi}{a'}. \end{cases} \tag{152}$$

On a

$$\xi = x - a, \qquad \xi_1 = a_1 - x = a' - \xi;$$

$$u = \xi_1\frac{e^{Z_1}}{m\theta_1}, \qquad \log u = \log\frac{a' - \xi}{m\theta_1} + Z_1, \qquad N(\log u) = h.$$

Puis, d'après (124),

$$P=\int_{a_1}^{x}\left[\frac{A_1 x}{a_1(\lambda-b)}+\frac{1}{x-a_1}\right]dx.$$

En appliquant la méthode de la Note (E), on trouve

$$P=k\log\mu+E+\left(k\beta_0-\frac{1}{a'}\right)\xi+\dots;$$

d'où

$$N(P)=k\log\mu+E,$$

en posant

$$E=\int_{a_1}^{a}\left[\frac{A_1 x}{a_1(\lambda-b)}-\frac{k}{\xi}+\frac{1}{x-a_1}\right]dx.$$

Donc,

$$N(D_{00})=-k\log\mu+h-E.$$

On a maintenant, d'après (127),

$$P_2=\int_{a_1}^{x}\left[-\frac{A_1^2 x}{a_1(\lambda-b)^2}+\frac{1}{(a_1-x)^2}+\frac{\alpha_1}{x-a_1}\right]dx.$$

En appliquant toujours la méthode de la Note (E), on trouve

$$N(P_2)=-k'\beta_1\log\mu-\frac{k'}{a'}+E_1,$$

avec

$$E_1=\int_{a_1}^{a}\left[-\frac{A_1^2 x}{a_1(\lambda-b)^2}+\frac{k'}{\xi}\left(\beta_1+\frac{1}{\xi}\right)+\frac{1}{(x-a_1)^2}+\frac{\alpha_1}{x-a_1}\right]dx.$$

On a ensuite, d'après (138),

$$P_4=\int_{a_1}^{x}\left[-\frac{A_1^2 x(P-\log\zeta_1)}{a_1(\lambda-b)^2}-\frac{\log\zeta_1}{\zeta_1^2}+\frac{\alpha_1\log\zeta_1+\alpha_0}{\zeta_1}\right]dx.$$

En utilisant le développement de P donné plus haut, on trouve

$$N(P_4)=-\beta_1 kk'\frac{\log^2\mu}{2}+k'(\beta_1 h''-k\beta_0)\log\mu+\frac{k'(h''-k)}{a'}+E_2,$$

en posant

$$h''=\log a'-E$$

et

$$E_2=\int_{a_1}^{a}\left[P_4'(x)-\frac{k'h''}{\zeta^2}+k'\frac{k\beta_0-\beta_1 h''}{\zeta}+\frac{kk'}{\zeta^2}\log\mu+\beta_1\frac{kk'}{\zeta}\log\mu\right]dx.$$

On en déduit

$$N(D_{10})=-\beta_1\frac{kk'}{2}\log^2\mu+k'[\beta_1(h''-h')-k\beta_0]\log\mu+C,$$

avec

$$C=\alpha_1\left(\frac{h^2-Z_1^2}{2}-Z_1-2-\frac{1}{m}\right)+\alpha_0 h+\frac{1+h+k'(h-E-k)}{a'}+E_2+h'E_1.$$

Enfin,

$$D_{01} = \frac{Z_1}{m}.$$

66. On a maintenant

$$z = \frac{D}{A_0\theta} = \frac{\theta'}{k}(D_{00} + D_{10}\theta_1 + D_{01}\zeta_1 + \dots). \tag{153}$$

La partie principale de z_0 est

$$Z_0 = \theta'\left(-\log\frac{\zeta}{\varepsilon} + \log a' + \frac{h - E}{k}\right).$$

De plus,

$$\zeta = \frac{\theta'}{k} D_{01}\zeta_1 = \frac{Z_1}{km}\theta'\zeta_1. \tag{154}$$

Reportons-nous maintenant au n° 47. De (121), on déduit

$$N(Y_0) = \theta' \log\frac{C}{s}.$$

Or, d'après (153) et (154),

$$Z_0 + \zeta + Y_0 = \frac{\theta'}{k}\left(D_{00} + \frac{k\zeta}{\theta'}\right).$$

En égalant les noyaux des deux membres, on voit que $C = 1$.

Dans l'équation différentielle qui donne Y_1 (n° 47), on peut faire $\zeta = 0$, car l'erreur commise sur $Y_1\theta$, donc sur z, est de l'ordre des termes négligés. On obtient, en intégrant :

$$Y_1 = \theta'\frac{s+v}{s+v+\theta'}\left[-\beta_0(s+v) - \beta_1\frac{v^2}{2\theta'} + \frac{Y_0}{a} + \Gamma\right] - \theta'\frac{b_0 v^2 + \beta_1\theta'(v-\theta')}{s+v+\theta'},$$

où Γ est la constante d'intégration et où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$v = Y_0 + Z_0 - \theta'.$$

On en déduit

$$N(Y_1) = \theta'\left[-\beta_1\frac{\theta'}{2}\log^2 s + (\beta_1 z_0 - \beta_0\theta')\log s - \beta_1\frac{\theta'}{2} - b_0 z_0 - \beta_1\frac{Z_0^2}{2\theta'} + 2\beta_0\theta' + \Gamma\right].$$

Or, d'après (153),

$$N(Y_1) = \frac{\theta'^2}{kk'} N(D_{10}).$$

On constate la disparition des termes en $\log s$ et l'on déduit

$$\frac{\Gamma}{\theta'} = \frac{\log a' - \log\theta}{a} + \beta_1\frac{(k + E - h)^2}{2k^2} - 2\beta_0 + \frac{h' E_1}{kk'} + \frac{1}{a'}\left(\frac{1+h}{kk'} - 1\right)$$
$$+ \frac{1}{kk'}\left[\alpha_1\left(\frac{h^2 - Z_1^2}{2} - Z_1 - 2 - \frac{1}{m}\right) + h\alpha_0 + E_2\right] + \frac{E - h}{k}\left(b_0 - \frac{\alpha_1}{aa'}\right).$$

Pour avoir la *déviation au point frontière*, il suffit de faire $s = 0$. En particulier, l'équation (121) devient

$$e^{-\frac{Y_0}{\theta'}} = Y_0 + Z_0 + \zeta - \theta'. \tag{155}$$

Il faut résoudre cette équation par rapport à Y_0. On peut évidemment le faire par un développement en série. Mais, ce développement *converge lentement*, parce que θ' tend lentement vers zéro avec ε. On retombe ainsi sur la difficulté signalée au n° 47. Toutefois, elle est maintenant très localisée. On peut résoudre (155), pour $\zeta = 0$, par une méthode d'approximation quelconque; puis développer suivant ζ, en ne gardant qu'un seul terme.

67. *Calcul du temps.* — Au n° 58, nous avons calculé les coefficients du développement

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_1\theta_1}{a_1}(T_{00} + T_{10}\theta_1 + T_{01}\zeta_1 + \dots).$$

Calculons leurs noyaux. Des formules (129) et (131), on déduit, par des calculs analogues aux précédents :

$$N(Q) = \frac{A_1}{A_0}\log\mu + F, \qquad F = \int_{a_1}^{a}\left[\frac{A_1}{x-b} - \frac{A_1}{A_0\xi} + \frac{1}{x-a_1}\right]dx;$$

$$N(Q_1) = \frac{A_1^2}{A_0^2}\left[\frac{h''-k}{a'} + b_0 k\log^2\mu - (2b_0h'' + k\beta_0)\log\mu\right] + F_1,$$

$$F_1 = \int_{a_1}^{a}\left[Q_1'(x) + \frac{A_1^2}{A_0^2}\left(\frac{k\log\mu - h''}{\xi^2} + \frac{k\beta_0 + 2b_0h'' - 2b_0k\log\mu}{\xi}\right)\right]dx;$$

$$N(Q_2) = \frac{A_1^2}{A_0^2}\left(2b_0\log\mu - \frac{1}{a'}\right) + F_2.$$

$$F_2 = \int_{a_1}^{a}\left[Q_2'(x) + \frac{A_1^2}{A_0^2}(1 - 2b_0\xi)\right]dx.$$

On en déduit

$$N(T_{00}) = -\frac{A_1}{A_0}\log\mu + h - Z_1 - F,$$

$$N(T_{10}) = \frac{A_1^2}{A_0^2}[b_0k\log^2\mu + (2b_0h' - 2b_0h'' - k\beta_0)\log\mu] + C',$$

$$C' = \alpha_0 h + b_0' h^2 + \frac{1+h}{a'} + \frac{A_1^2}{A_0^2 a'}(h'' - h' - k) - b_0' Z_1^2 - \alpha_1\left(Z_1 + 2 + \frac{1}{m}\right) + F_1 - h'F_2.$$

On a maintenant, avec la notation du n° 48 et d'après (59) :

$$T_0 = Y_0 + \Gamma; \qquad N(T_0) = \Gamma - \theta'\log s.$$

On doit avoir d'autre part

$$T_0 = \theta'\frac{A_0}{A_1}(T_{00} + T_{01}\zeta_1).$$

En égalant les noyaux, on constate que $\log s$ disparaît et l'on trouve

$$\Gamma = -\theta'\log\frac{\theta}{a'} + \theta'\frac{A_0}{A_1}\left(h - Z_1 - F - \frac{\zeta_1}{m}\right).$$

On a ensuite

$$T_1 = Y_1 - \frac{1}{a}\int s\, dY_0$$

ou, en se reportant au n° 66,

$$T_1 = Y_1 + \theta' \frac{s}{a} + \frac{Y_0}{a}\left(Z_0 + \frac{Y_0}{2}\right) + \Gamma_1.$$

D'où

$$N(T_1) = N(Y_1) + \theta'^2 \frac{\log^2 s}{2a} - \theta' \frac{Z_0}{a} \log s + \Gamma_1$$
$$= \theta'^2 \frac{N(D_{10})}{kk'} + \frac{\log^2 s}{2a} - \frac{\log s}{a}\left(\log \frac{a'}{\theta} + \frac{h - E}{k}\right) + \Gamma_1.$$

Mais, on doit avoir

$$T_1 = \frac{A_0^2}{A_1^2 k}\, \theta'^2 T_{10}.$$

En égalant les noyaux, on constate que $\log s$ disparaît et l'on trouve

$$\Gamma_1 = \theta'^2 \left[\frac{1}{2a} \log^2 \frac{\theta}{a'} + \frac{E - h}{ka} \log \frac{\theta}{a'} + C' \frac{A_0^2}{A_1^2 k} - \frac{C}{kk'}\right].$$

En faisant $s = 0$, on a le *temps de parcours de l'arc total.*

CHAPITRE VI.

CALCUL DE L'AMPLITUDE ET DE LA PÉRIODE DE L'OSCILLATION PÉRIODIQUE.

68. *Détermination du point terminal.* — Grâce au principe de l'accumulation des trajectoires (n° 15), *le sommet inférieur est entièrement déterminé, à une erreur exponentielle près, par le point frontière de droite du dernier arc de première espèce.* Nous savons calculer la déviation $D_{s'}$ correspondante par une série asymptotique. En répétant les mêmes calculs à gauche de Oy, nous pouvons de même calculer la déviation D_s au sommet supérieur.

D'autre part, si nous prenons pour point terminal le point terminal limite E, nous savons aussi calculer la déviation Δ_s au sommet supérieur. Mais, cette déviation n'est pas égale à D_s. *Pour que la trajectoire soit un cycle*, il faut *remplacer le point* E *par un point voisin* E', qu'il s'agit de déterminer.

Soit a l'abscisse de E et $a + z$ celle de E'. La déviation Δ_s est une fonction déterminée de ε et de a, soit

$$\Delta_s = f(\varepsilon, a).$$

L'équation déterminant z s'écrit

$$\lambda(a + z) - \lambda(a) + f(\varepsilon, a + z) = D_s. \tag{156}$$

La fonction $f(\varepsilon, a)$ résulte des calculs faits au n° 50. En remplaçant θ par $\varepsilon^2 \frac{a}{A_0^2}$, on a

$$f(\varepsilon, a) = \varepsilon^2 F(a) + \varepsilon^4 G(a) + \dots,$$

avec

$$F(a) = \frac{a}{A_0} D_1, \qquad G(a) = \frac{a^2}{A_0^3} D_2, \quad \dots,$$

les coefficients D_1 et D_2 étant donnés par les formules (123) et (125), où l'on doit remplacer ξ par a.

L'équation (156) s'écrit, en remarquant que $z = -\xi$,

$$(157) \quad z = b_0 z^2 - b_1 z^3 + \dots - \varepsilon^2 [F(a) + z F'(a) + \dots] - \varepsilon^4 [G(a) + \dots] + \dots + D_S.$$

Elle peut être résolue par la méthode des approximations successives.

Calculons explicitement $F'(a)$. On a

$$F'(a) = \frac{D_1}{A_0} - \frac{a}{A_0^2} D_1 \frac{dA_0}{da} + \frac{a}{A_0} \frac{dD_1}{da}.$$

Or, $\frac{dA_0}{da}$ n'est autre que la valeur de $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ pour $x = a$, soit $-2A_0 b_0$. D'autre part, la formule (123) nous donne, pour $\xi = a$,

$$D_1 = \log \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} - \int_0^a \frac{1 + aB}{a(1 + B\xi)} d\xi.$$

Donc,

$$\frac{dD_1}{da} = -4 b_0 - \frac{1}{a} - \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial a} d\xi, \qquad \varphi = \frac{1 + aB}{a(1 + B\xi)}.$$

On trouve, tous calculs faits,

$$A_0 F'(a) = 2(1 + 2ab_0) \log \frac{A_0}{\varepsilon} - 1 - 4ab_0 - I,$$

avec

$$I = \int_0^a \frac{B(1 + B\xi)(1 + 2ab_0) + 2b_0(1 + aB) - x \frac{dB}{d\xi} + 2x \frac{b_0 - B}{\xi}}{(1 + B\xi)^2} d\xi.$$

69. Supposons que *le point frontière le plus élevé à gauche de* Oy *soit d'ordre* 1 *à gauche et à droite* et que D_S ait été calculée par les formules du n° 57. Dans ce cas, D_S est d'ordre 2 et l'erreur commise dans son calcul est d'ordre 6. Il s'ensuit que z est aussi d'ordre 2 et l'équation (157) se réduit à

$$z = b_0 z^2 - \varepsilon^2 [F(a) + z F'(a)] - \varepsilon^4 G(a) + D_S;$$

d'où l'on tire

$$(158) \quad \begin{aligned} z = D_S &- \varepsilon^2 F(a) + \varepsilon^4 [F(a) F'(a) - G(a) + b_0 F^2(a)] \\ &- \varepsilon^2 D_S [F'(a) + 2b_0 F(a)] + b_0 D_S^2, \end{aligned}$$

avec une erreur du sixième ordre.

Supposons maintenant que *le point frontière ci-dessus soit d'ordre 2 à gauche et à droite* et que D_S ait été calculée par les formules du n° 59. L'ordre de D_S est $\frac{4}{3}$ et l'équation (157) se réduit à

$$z = b_0 z^2 - \varepsilon^2 F(a) + D_S;$$

d'où l'on tire

$$z = D_S - \varepsilon^2 F(a) + b_0 D_S^2, \tag{159}$$

avec une erreur d'ordre $\frac{10}{3}$.

Remarquons que, dans tous les cas, z est positif, car D_S est toujours d'ordre inférieur à ε^2. En effet, cet ordre est maximum dans le cas de la formule (158) et c'est alors l'ordre de $-\varepsilon^2 \log\varepsilon$. On en conclut que *le point terminal vrai est toujours plus éloigné de* Oy *que le point terminal limite*.

70. *Calcul de l'amplitude.* — L'abscisse $a + z$ du point terminal vrai représente le maximum d'élongation du point M au cours de l'oscillation. On calcule de même l'abscisse du point terminal de gauche, c'est-à-dire le minimum d'élongation du point M. La différence donne la *course*.

Dans le cas où la courbe fondamentale est symétrique par rapport à l'origine, il en est de même de l'oscillation de M; l'*amplitude* de cette oscillation est alors $a + z$.

71. *Calcul de la période.* — Nous pouvons d'abord calculer le temps de parcours de la trajectoire de droite, en partant du point terminal limite. Ce temps est une fonction déterminée de a, soit $f(a)$. Le temps de parcours du demi-cycle de droite est $T = f(a + z)$. On peut le calculer par la formule de Taylor.

Voyons sous quelle forme se présente la fonction $f(a)$. Elle comprend d'abord le temps de parcours $f_1(a)$ de l'arc supérieur, qui se calcule par la formule (71). Nous avons ensuite le temps de parcours de l'arc inférieur. Soit M_1 un point quelconque de cet arc, ayant une abscisse fixe. Nous savons que sa position est indépendante de la position du point terminal, à une erreur exponentielle près (n° 15). Dès lors, le temps de parcours de l'arc M_1S' est indépendant de a et nous pouvons, à une constante additive près, ne garder que le temps de parcours de l'arc EM_1. Choisissons M_1 sur le premier arc de seconde espèce. Ce temps nous est donné par la formule (26). Si l'on appelle x_1 l'abscisse constante de M_1, nous avons d'abord le terme

$$f_2(a) = \frac{1}{\varepsilon^\omega} \int_{x_1}^{a} \frac{\lambda'}{x}\, dx, \quad \cdot \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dx}.$$

Le deuxième terme de la formule (26) est indépendant de a, à une erreur

exponentielle près (n° 15). Le troisième est nul. Le quatrième nous est donné par la formule asymptotique (80) :

$$f_3(a) = \frac{1}{\varepsilon\omega}(\varepsilon^2 J_1 + \varepsilon^4 J_2 + \dots).$$

72. Pour calculer $f(a+z) - f(a)$ par la formule de Taylor, il nous suffit de connaître les dérivées successives de $f(a)$.

Nous avons d'abord, en faisant $\xi = a$ dans (71) :

$$\varepsilon\omega f_1(a) = \varepsilon^2 F_1(a) + \varepsilon^4 G_1(a) + \dots,$$

avec (n° 51)

$$F_1(a) = \frac{a}{A_0} T_1(a) = \frac{2\log A_0 - 2\log\varepsilon - Q(a)}{A_0}, \qquad G_1(a) = \frac{a^2}{A_0^2} T_2(a), \qquad \dots.$$

Calculons seulement $F_1'(a)$:

$$F_1'(a) = \frac{4b_0(\log A_0 - \log\varepsilon - 1) - 2b_0 Q(a) - Q'(a)}{A_0}.$$

Or,

$$Q(a) = \int_0^a \psi\, d\xi, \qquad \psi = \frac{B}{1 + B\xi}.$$

D'où

$$Q'(a) = \frac{B(a)}{1 + aB(a)} + \int_0^a \frac{\partial\psi}{\partial a}\, d\xi.$$

En remarquant que λ s'annule pour $\xi = a$, on voit que le premier terme vaut $\frac{1}{a} - \frac{A_0}{b}$. Le second se calcule sans difficulté et l'on trouve, tous calculs faits,

$$A_0 F_1'(a) = 4b_0\left(\log\frac{A_0}{\varepsilon} - 1\right) - \frac{1}{a} + \frac{A_0}{b} + I',$$

avec

$$I' = \int_0^a \frac{\dfrac{dB}{d\xi} + 2\dfrac{B - b_0}{\xi} - 2b_0 B(2 + B\xi)}{(1 + B\xi)^2}\, d\xi.$$

On a ensuite

$$\varepsilon\omega f_2(a) = \frac{\lambda'(a)}{a} = \frac{A_0}{a}, \qquad \varepsilon\omega f_2''(a) = -\frac{A_0(1 + 2ab_0)}{a^2}, \qquad \dots.$$

On a enfin, en se reportant au n° 53,

$$J_1'(a) = -\frac{1}{aA_0}.$$

Finalement,

$$(160) \qquad \begin{cases} \varepsilon\omega f'(a) = \dfrac{A_0}{a} + \varepsilon^2\left[\dfrac{4b_0}{A_0}\left(\log\dfrac{A_0}{\varepsilon} - 1\right) + \dfrac{1}{b} - \dfrac{2}{aA_0} + \dfrac{I'}{A_0}\right] + \dots, \\ \varepsilon\omega f''(a) = -\dfrac{A_0(1 + 2ab_0)}{a^2} + \dots. \end{cases}$$

Si l'on appelle T_0 le temps de parcours calculé sur la trajectoire issue de E, on a

$$T = T_0 + zf'(a) + \frac{z^2}{2} f''(a) + \dots \tag{161}$$

Dans le premier cas examiné au n° 69, on garde tous les termes écrits dans (160) et (161) et l'on a T avec une erreur du cinquième ordre. Dans le deuxième cas, on garde encore les trois termes de (161); mais, on ne garde que le premier terme de la première formule (160). On a T avec une erreur d'ordre $\frac{7}{3}$.

On calcule d'une manière analogue le temps de parcours T′ du demi-cycle de gauche. La *période* est $T + T'$. Dans le cas de l'oscillation symétrique, elle vaut $2T$.

NOTE (A).

1. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m), \tag{1}$$

dans laquelle les z_i sont des variables complexes indépendantes et x une variable réelle. Nous ferons sur la fonction f les hypothèses suivantes, valables pour

$$x_0 < x < x_1, \quad |z_i| < R_i. \tag{2}$$

1° Il existe une fonction $\psi(x)$ réelle, positive et bornée, telle que l'inégalité

$$|y| < \psi(x) \tag{3}$$

entraîne

$$|I| < \psi(x), \tag{4}$$

en posant

$$I = \int_{x_0}^{x} f(x, y, z_1, \dots, z_m)\, dx. \tag{5}$$

2° Si les fonctions y et y' vérifient (3) et

$$|y - y'| < h'\psi(x), \tag{6}$$

on a

$$|I - I'| < hh'\psi(x), \tag{7}$$

I′ désignant ce que devient l'intégrale I quand on y remplace y par y' et h, h' désignant des nombres réels compris entre zéro et *un*.

3° Lorsque les inégalités (2) et (3) sont vérifiées, la fonction f est holomorphe par rapport à $y, z_1, \ldots, z_m$.

Dans ces conditions, nous allons démontrer que *l'équation* (1) *admet une solution et une seule s'annulant pour* $x = x_0$ *et que cette solution est fonction holomorphe des* z_i *dans le domaine* D *défini par* (2).

2. Employons la méthode des approximations successives, en posant

$$y_n = \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_m)\, dx, \qquad y_0 = 0. \tag{8}$$

L'inégalité (3) est vérifiée par y_0. Si elle l'est par y_{n-1}, elle l'est aussi par y_n, d'après (8) et (4). Elle est donc vérifiée par y_n, quel que soit n.

Posons maintenant $u_n = y_{n+1} - y_n$. On a

$$|u_0| = |y_1| < \psi(x).$$

Admettons que l'on ait

$$|u_n| < h^n \psi(x). \tag{9}$$

Comme $h^n < 1$, on en déduit, d'après (7),

$$|u_{n+1}| < h^{n+1} \psi(x).$$

La fonction $\psi(x)$ étant bornée dans l'intervalle (x_0, x_1), on en conclut que la série est *uniformément convergente* dans le domaine D.

L'inégalité (3) étant vérifiée par y_0, la fonction $f(x, y_0, z_1, \ldots, z_m)$ est holomorphe par rapport aux z_i dans le domaine D. Il en est donc de même de y_1 (1).

Admettons que y_{n-1} soit fonction holomorphe des z_i dans le domaine D. Il en est de même de $f(x, y_{n-1}, z_1, \ldots, z_m)$ et par conséquent de y_n (1). On en conclut que y_n est holomorphe par rapport aux z_i quel que soit n. Il en est de même de u_n et, comme la série u_n est uniformément convergente, il en est de même de sa somme y (2).

La fonction y vérifie (1), s'annule pour $x = x_0$ et constitue, comme on sait (3), la seule solution remplissant cette condition.

Elle peut être *développée suivant les puissances des* z_i dans le domaine D. Ce développement est majoré par celui de la fonction

$$\frac{\psi(x)}{\left(1 - \frac{z_1}{R_1}\right)\left(1 - \frac{z_2}{R_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_m}{R_m}\right)}.$$

(1) Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 274. La conclusion est encore valable si la fonction f devient infinie pour certaines valeurs de x appartenant à l'intervalle (x_0, x_1) et aussi si ledit intervalle est infini. Car, la fonction $\psi(x)$ étant bornée, l'intégrale I est uniformément convergente, donc holomorphe par rapport aux z_i (*loc. cit.*, pp. 275 et 276).

(2) *Loc. cit.*, p. 107.

(3) *Loc. cit.*, p. 372.

Si l'on ne garde que les termes pour lesquels l'exposant de z_i est $\leq p_i$, l'erreur commise a un module inférieur à

$$(10) \qquad \frac{\psi(x)}{\left(1-\frac{z_1}{R_1}\right)\cdots\left(1-\frac{z_m}{R_m}\right)}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{z_i^{p_i+1}}{R_i^{p_i+1}}\right].$$

NOTE (B).

Considérons une série multiple telle que la suivante

$$\sum_n\sum_p\sum_q \frac{a_{npq}}{s^{na+pb+q}},$$

où n, p sont des entiers ≥ 0 et q un entier pouvant prendre un nombre fini de valeurs négatives; a et b sont deux nombres positifs quelconques; les a_{npq} sont des coefficients constants. Supposons cette série absolument convergente pour $s = S > 1$. Nous dirons que c'est une *série* (B); a et b seront ses *nombres caractéristiques*; son *ordre m* sera le plus grand des nombres $-(na+pb+q)$.

Considérons maintenant une fonction $f(s)$, continue pour $s \geq 0$ et qui, pour $s > S$, est le produit de $(\log s)^k$ par une série (B), k désignant un exposant entier ≥ 0. Proposons-nous d'étudier l'intégrale

$$F(s) = \int_0^s f(s)\,ds$$

pour les grandes valeurs de s.

Observons d'abord que la série représentant $f(s)$ pour $s > S$ est absolument et uniformément convergente. En effet, la dérivée du module de son terme général a le signe de $k-(na+pb+q)\log s$; elle est donc négative si n, p, q sont assez grands. Il s'ensuit que la série est majorée par celle qu'on obtient en y remplaçant s par S, laquelle est absolument convergente.

Cela posé, appelons $f_1(s)$ la somme des termes pour lesquels $na+pb+q<1$; $f_2(s)$ la somme des termes, s'ils existent (1), pour lesquels $na+pb+q=1$; $f_3(s)$ la somme des termes restants. On peut écrire, en supposant $s > S$,

$$(1) \quad F(s) = \int_0^s f_1(s)\,ds + \int_0^1 (f-f_1)\,ds + \int_1^s f_2(s)\,ds + \int_1^\infty (f-f_1-f_2)\,ds + \int_\infty^s f_3(s)\,ds.$$

La première des cinq intégrales ci-dessus donne un nombre fini de termes en $\frac{(\log s)^{k'}}{s^{na-pb-q-1}}$, avec $0 \leq k' \leq k$; la deuxième et la quatrième donnent un terme

(1) Ils n'existent certainement pas si l'ordre de la série est < -1.

constant; la troisième un terme en $(\log s)^{k-1}$. Enfin, la cinquième peut être intégrée terme à terme et donne une série dont le terme général est

$$\frac{a_{np\rho}}{-\lambda s^{\lambda}}\left[\log^k s+\frac{k}{\lambda}\log^{k-1}s+\frac{k(k-1)}{\lambda^2}\log^{k-2}s+\ldots+\frac{k!}{\lambda^k}\right],$$

en posant $\lambda=na+pb+q-1$. Les termes du crochet étant tous positifs, on peut effectuer la multiplication et ordonner suivant les puissances de $\log s$.

Pour simplifier le langage, convenons d'appeler *polynome* (H) *de degré k et d'ordre m tout polynome de degré k en* $\log s$ *et dont les coefficients sont des séries* B *d'ordre m*. Nous voyons que, pour s très grand, $F(s)$ est la somme d'un polynome (H) de degré k et d'ordre $m+1$ et d'une fonction linéaire de $\log^{k+1}s$.

Supposons maintenant que, pour s très grand, $f(s)$ *soit un polynome* (H) *de degré k et d'ordre m*. Reprenons la démonstration précédente. Dans chaque terme de $f_1(s)$, le facteur $\log^k s$ est remplacé par un polynome de degré k en $\log s$ et à coefficients constants; en intégrant, on obtient des termes analogues à ceux précédemment obtenus, avec $0\leq k'\leq k$. De même, f_2 donne un polynome de degré $k+1$ en $\log s$ et à coefficients constants. Enfin, f_3 est la somme de $k+1$ séries analogues à celle que nous avions tout à l'heure et donne, par intégration, un polynome (H). En définitive, $F(s)$ *est la somme d'un polynome* (H) *de degré k et d'ordre* $m+1$ *et d'un polynome* (H) *de degré* $k+1$ *et à coefficients constants, donc d'ordre nul.* Ce dernier polynome, qui est la somme des trois termes médians de la formule (1), sera appelé le *noyau* de l'intégrale $F(s)$. Si $m<-1$, il se réduit à la constante $\int_0^\infty (f-f_1)\,ds$.

NOTE (C).

Soit la série double

$$\sum_n\sum_p a_{np}\frac{\log^p s}{s^{n+p}},$$

où p est un entier ≥ 0 et n un entier pouvant prendre un nombre fini de valeurs négatives; les a_{np} sont des coefficients constants. Une telle série sera dite *série* (C); son ordre m sera le plus grand des nombres $-(n+p)$. Nous supposons enfin qu'elle est absolument convergente pour $s=S>1$ et, comme dans la note (B), nous en déduisons qu'elle est absolument et uniformément convergente pour $s>S$.

Soit maintenant $f(s)$ une fonction continue pour $s\geq 0$ et qui, pour $s>S$, est une série (C) d'ordre m. Considérons la même intégrale que dans la Note (B). Nous pouvons la décomposer en cinq intégrales partielles, comme dans ladite Note, selon la valeur de $n+p$ par rapport à -1 et nous obtenons ainsi une série (C) d'ordre $m+1$ si $m>-1$, d'ordre nul si $m\leq -1$.

NOTE (D).

1. Soit une fonction $f(s)$ de la variable réelle et positive s, admettant le développement asymptotique

$$(1) \qquad f(s) = s^{\alpha-1}\left[a + \frac{k}{s^{\alpha}} + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{s^{i\alpha}} + \frac{A}{s^{(n+1)\alpha}}\right].$$

Dans cette formule, α désigne un exposant > 0; a est une constante positive; A est une fonction de s, dont le module est borné pour $s = +\infty$. Posons

$$(2) \qquad \varphi = \int_0^s f(s)\,ds.$$

Soit maintenant la fonction $g(s)$, admettant le développement asymptotique

$$(3) \qquad g(s) = s^m\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{s^{i\alpha}} + \frac{C}{s^{n+1)\alpha}}\right],$$

C étant, comme A, une fonction à module borné et m un exposant quelconque. Nous nous proposons de *chercher un développement asymptotique de la fonction*

$$(4) \qquad G = e^{\varphi}\int_{+\infty}^{\varphi} g(s)\,e^{-\varphi}\,d\varphi.$$

2. Pour éviter toute confusion, affectons d'un accent la variable d'intégration. On peut écrire

$$(5) \qquad G = \int_{+\infty}^{\varphi} g(s')\,e^{\varphi-\varphi'}\,d\varphi'.$$

Or,

$$(6) \qquad \varphi - \varphi' = \int_{s'}^{s} f(s)\,ds = \frac{a}{\alpha}(s^{\alpha} - s'^{\alpha}) + k\log\frac{s}{s'} + P(s') - P(s) + R,$$

en posant

$$P(s) = \sum_{h=2}^{n}\frac{a_h}{(h-1)\alpha s^{(h-1)\alpha}}, \qquad R = \frac{B}{n\alpha}\left(\frac{1}{s'^{n\alpha}} - \frac{1}{s^{n\alpha}}\right).$$

Le coefficient B est, d'après le théorème de la moyenne, la valeur de A pour une valeur de la variable comprise entre s et s'; c'est donc une fonction de s et de s' dont le module reste borné, comme celui de A.

3. Faisons maintenant le changement de variable

$$(7) \qquad s'^{\alpha} = s^{\alpha} + \frac{\alpha}{a}x.$$

Il vient

$$G = -\frac{s^k}{a}\int_0^{+\infty} \frac{f(s')\,g(s')}{s'^{k+\alpha-1}}\, e^{P(s')-P(s)+R}\, e^{-x}\, dx. \tag{8}$$

D'après (1) et (3), $\frac{f(s')\,g(s')}{s'^{k+\alpha-1}}$ est le produit de s'^{m-k} par une série asymptotique analogue à celles qui figurent dans les crochets de (1) et (3). D'autre part,

$$\frac{1}{s^\alpha} - \frac{1}{s'^\alpha} = \frac{\alpha x}{a s^\alpha s'^\alpha}.$$

On en conclut que

$$z = P(s') - P(s) + R = \frac{x}{s^\alpha s'^\alpha} Q,$$

Q désignant un polynome de degré $n-1$ en $\frac{1}{s^\alpha}$, $\frac{1}{s'^\alpha}$, dont les coefficients sont des constantes connues, sauf ceux des termes de degré $n-1$, qui sont égaux à $\frac{B}{n\alpha}$ et par conséquent bornés.

Faisons un développement limité de e^z, en nous arrêtant au terme en z^q, q désignant la partie entière de $\frac{n}{2}$. L'erreur est de la forme λz^{q+1}, λ restant borné quand z tend vers zéro et par conséquent quand s tend vers zéro et par conséquent quand s tend vers $+\infty$. Comme $|z| < \mu \frac{x}{s^{2\alpha}}$, μ désignant un facteur constant positif, ladite erreur est bornée par $\rho \frac{x^{q+1}}{s^{2\alpha(q+1)}}$, ρ désignant un autre facteur constant positif. Mais, $2(q+1) \geqq n+1$. Donc, l'erreur est bornée par $\rho \frac{x^{q+1}}{s^{\alpha(n+1)}}$.

Remplaçons maintenant z par $\frac{x}{s^\alpha s'^\alpha} Q$ dans les différents termes du développement. Puis, effectuons les calculs, en ne gardant que les termes de degré $\leqq n$ par rapport à l'ensemble des variables $\frac{1}{s^\alpha}$, $\frac{1}{s'^\alpha}$. L'ensemble des termes négligés peut être incorporé dans l'erreur ci-dessus, qui continue à garder la même forme. Quant aux termes conservés, ils constituent un polynome de degré n par rapport à $\frac{1}{s^\alpha}$, $\frac{1}{s'^\alpha}$; chaque coefficient de ce polynome est un polynome en x de degré $\leqq q \leqq \frac{n}{2}$. Multiplions enfin le développement précédent par celui de $\frac{f(s')\,g(s')}{s'^{k+\alpha-1}}$. Nous obtenons une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\frac{s'^{m-k-j\alpha}}{s^{i\alpha}} x^h$, avec $h \leqq \frac{n}{2}$ et $i \leqq n-1$. Quant au nombre entier j, il peut prendre des valeurs allant de 1 à $2n-1$; mais, nous ne gardons que celles pour lesquelles on a $i+j \leqq n$. L'erreur globale est bornée par $M \frac{s'^{m-k}}{s^{\alpha n+1}} x^{q+1}$, M désignant un certain facteur constant.

Finalement, G est une combinaison linéaire d'expressions de la forme $s^{k-i\alpha}I_{ph}$, en posant

$$I_{ph}=\int_0^{+\infty} s'^p x^h e^{-x}\,dx \qquad (p=m-k-j\alpha);$$

avec une erreur dont le module est inférieur à

$$\frac{Ms^k}{s^{\alpha(n+1)}}I_{m-k,q+1}. \tag{9}$$

4. Calculons maintenant un développement asymptotique de l'intégrale I_{ph}. On a

$$s'^p=s^p\left(1+\frac{\alpha x}{\alpha s^\alpha}\right)^{\frac{p}{\alpha}}$$

ou, en appliquant la formule de Taylor,

$$s'^p=\sum_{i=0}^{r-1} C_i\frac{x^i}{s^{i\alpha-p}}+C_r\frac{x^r}{s'^{\alpha-p}}\left(1+\frac{\theta\alpha x}{\alpha s^\alpha}\right)^{\frac{p}{\alpha}-r} \qquad (0<\theta<1);$$

les C_i étant des coefficients constants que l'on sait calculer. On en déduit

$$I_{ph}=\sum_{\lambda=0}^{r-1}\frac{C_\lambda(\lambda+h)!}{s^{\alpha\lambda-p}}+\frac{Cr}{s'^{\alpha-p}}\int_0^\infty\left(1+\frac{\theta\alpha x}{\alpha s^\alpha}\right)^{\frac{p}{\alpha}-r}x^{r+h}e^{-x}\,dx. \tag{10}$$

L'intégrale figurant dans le dernier terme ayant une valeur finie, la formule (10) constitue bien un développement asymptotique.

En multipliant I_{ph} par $s^{k-i\alpha}$ et remplaçant p par sa valeur, l'exposant de $\frac{1}{s}$ dans le terme général est

$$\alpha\lambda-m+k+j\alpha+i\alpha-k=-m+\alpha(i+j+\lambda).$$

Son minimum est $-m+\alpha(i+j)$; son maximum est $-m+n\alpha$, si l'on prend $r=n-i-j+1$. De plus, $I_{m-k,q+1}$ étant de l'ordre de s^{m-k}, l'expression (9) est de l'ordre de $\frac{s^m}{s^{\alpha(n+1)}}$.

En définitive, *nous obtenons une série asymptotique de la forme*

$$G=s^m\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{g_i}{s^{\alpha i}}+\frac{G_n}{s^{\alpha(n+1)}}\right], \tag{11}$$

les coefficients g_i étant des constantes que l'on sait calculer et le facteur G_n restant borné pour s infini. Voici les valeurs des quatre premiers coefficients g_i :

$$\left\{\begin{aligned} &g_0=-c_0, \qquad g_1=-c_1-m\frac{c_0}{a}, \qquad g_2=-c_2-(m-\alpha)\frac{c_1}{a}-m(m-k-\alpha)\frac{c_0}{a^2},\\ &g_3=-c_3-(m-2\alpha)\frac{c_2}{a}-(m-\alpha)(m-k-2\alpha)\frac{c_1}{a^2}+m\frac{c_0a_2}{a^2}\\ &\qquad\qquad -m(m-k-\alpha)(m-k-2\alpha)\frac{c_0}{a^3}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

NOTE (E).

Soit une fonction $f(x)$ se présentant sous la forme d'un polynome de degré p en $\log x$, chaque coefficient de ce polynome étant une fonction holomorphe de x au voisinage de $x=0$. Soit d'autre part un exposant entier et positif m. Considérons l'intégrale indéfinie

$$F(x)=\int \frac{f(x)}{x^m}\,dx.$$

Développons le coefficient de chaque puissance de $\log x$ suivant les puissances de x, en nous arrêtant au terme de degré $m-1$. Nous obtenons

$$F(x)=\sum_{n=0}^{m-1}\int \frac{P_n(\log x)}{x^{m-n}}\,dx+\int_0^x R(x)\,dx,$$

où $P_n(\log x)$ désigne un polynome de degré p en $\log x$, à coefficients constants et $R(x)$ un polynome de degré p en $\log x$, à coefficients holomorphes. En effectuant l'intégration des premiers termes, on obtient

$$F(x)=\sum_{n=0}^{m-2}\frac{Q_n(\log x)}{x^{m-n-1}}+N(F)+\int_0^x R(x)\,dx, \tag{1}$$

où Q_n désigne un polynome de degré p en $\log x$, à *coefficients constants* et $N(F)$ un polynome de degré $p+1$ en $\log x$, à *coefficients constants* et dont *le terme constant est arbitraire*. Quant au dernier terme de la formule (1), c'est une fonction analogue à $f(x)$, mais s'annulant avec x.

Le polynome $N(F)$ sera appelé le *noyau* de la fonction $F(x)$; c'est lui qui *renferme la constante d'intégration*.

Si m est *fractionnaire*, nous supposons $p=0$. Dans ce cas, on limite n à la partie entière m' de $m-1$. On a une formule analogue à (1); mais chaque Q_n est une constante et le *noyau* $N(F)$ *se réduit à la constante d'intégration*. Quant à $R(x)$, c'est le produit de $x^{m'-1-m}$ par une fonction holomorphe; le dernier terme de (1) est le produit de $x^{m'+1-m}$ par une fonction holomorphe.

SUR

DES PROPRIÉTÉS DE REPRÉSENTATIONS PERMUTABLES

ET DES GÉNÉRALISATIONS D'UN THÉORÈME DE BORSUK

PAR M. GUY HIRSCH.

Je me propose d'établir un théorème concernant le nombre de Lefschetz [ou le nombre algébrique des points fixes (1)] d'une représentation (2) permutable avec des représentations topologiques.

Je rappelle un théorème de BORSUK (3) : *Le degré* (4) *de toute représentation T de la sphère* S^n *à n dimensions en elle-même, qui représente chaque paire de points diamétralement opposés de* S^n sur (*et pas seulement* en) *une paire de pareils points, est impair.*

On peut encore lui donner la forme suivante : *Le degré de toute représentation T permutable avec la représentation antipodique* (5) *de* S^n *en elle-même est impair.*

---

(1) *Voir* P. ALEXANDROFF et H. HOPF, *Topologie I*, Berlin, 1935, pp. 531 et 542. Les notions nécessaires à la lecture du présent article figurent en général dans cet ouvrage qui sera désigné ici par A. H., et aussi, en partie, dans H. SEIFERT et W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig et Berlin, 1934 (ouvrage désigné ici par S. T.); on trouvera également une brève nomenclature d'un certain nombre de ces notions, avec leurs principales propriétés, dans une Note mentionnée plus loin (18), où j'ai résumé quelques-unes des propriétés démontrées dans ce travail.

(2) Toutes les représentations qui seront considérées dans ce travail sont des représentations *univoques et continues*; sauf mention contraire, elles ne seront donc, en général, pas *topologiques*, c'est-à-dire *bi*-univoques et *bi*-continues.

(3) K. BORSUK, *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre* (*Fund. Math.*, 20, 1932, pp. 177-190, théorème I); *voir* aussi A. H., p. 483. Une démonstration de ce théorème, par application de la méthode qui sera utilisée dans cet article, a été donnée dans ma Note mentionnée plus loin (18).

(4) Nous désignerons par $c(T)$ le degré de la représentation T. On en trouvera une définition notamment dans A. H., pp. 461 et 490, ainsi que dans S. T., p. 283.

(5) La représentation antipodique est la représentation (topologique) qui représente chaque point de S^n sur le point diamétralement opposé.

Ce théorème est un cas particulier du théorème $\mathbf{B}'^{*}_{c}$, que j'établirai plus loin (§ III, n° 2) : *Soit T une représentation L-quasi-sphérique du polyèdre* E *en lui-même, permutable avec une représentation A (topologique) périodique d'ordre a, de* E *en lui-même. Supposons que toutes les puissances de A (à l'exception de la représentation identique) soient sans points fixes. Alors le degré de T est premier avec a.*

En vertu de la formule de Lefschetz-Hopf [exprimant le nombre algébrique des points fixes de T (6)], cette conclusion est une conséquence du théorème $\mathbf{A}'^{*}_{c}$: *Soit A une représentation (topologique) périodique, d'ordre a, du polyèdre* E *en lui-même; supposons que toutes les puissances de A (à l'exception de la représentation identique) soient sans points fixes. Alors le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec A, est un multiple de a.*

J'établirai un théorème qui généralise aussi celui-là, et duquel on pourra déduire un certain nombre de conséquences.

Je démontrerai en effet le théorème suivant (théorème **A**), où E désigne un ensemble dont la nature sera précisée plus loin.

THÉORÈME **A**. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec des représentations topologiques* (7) A_i *de* E *en lui-même. Désignons par* $\mathfrak{A}$ *le groupe engendré par ces représentations* A_i, *et par* $\mathfrak{B}$ *le sous-groupe de* $\mathfrak{A}$, *engendré par celles des représentations de* $\mathfrak{A}$ *qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T; désignons par* $\frac{a}{b}$ *l'indice de* $\mathfrak{B}$ *dans* $\mathfrak{A}$ (8).

Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de $\frac{a}{b}$ (9).

L'ensemble E sera ici un polyèdre fini. Il convient cependant de remarquer que, exception faite pour les réserves formulées ci-dessous concernant la nature des points fixes de T, nous ne devons imposer à E que l'unique condition suivante : E vérifie la formule de Lefschetz-Hopf (ainsi que le théorème d'invariance topologique de l'indice d'un point fixe régulier).

La méthode de démonstration du paragraphe I s'appliquera seulement aux représentations à points fixes réguliers (10); je déterminerai ultérieurement (§ II) des conditions suffisantes qu'il convient d'imposer à l'ensemble E et au groupe $\mathfrak{A}$

---

(6) A. H., pp. 531 et 541. Le nombre de Lefschetz d'une représentation T sera désigné ici par $l(T)$ [et non par $\Lambda(T)$ comme dans A. H.].

(7) Il suffirait même que les représentations A_i considérées soient topologiques seulement dans un voisinage des points fixes de T.

(8) Lorsque $\mathfrak{A}$ est d'ordre fini, nous appelons a l'ordre de $\mathfrak{A}$, et b l'ordre de $\mathfrak{B}$.

(9) Nous verrons plus loin que si $\frac{a}{b}$ n'est pas un nombre fini, le nombre de Lefschetz de T est égal à zéro. Nous observerons également qu'un théorème analogue reste valable encore lorsque T est seulement permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ de représentations sans l'être avec toutes les A_i séparément.

(10) A. H., p. 541.

(ainsi qu'au sous-groupe $\mathfrak{G}$) pour pouvoir éventuellement remplacer une représentation T dont tous les points fixes ne seraient pas réguliers par une représentation approchée à points fixes réguliers ([11]).

De ce théorème résulteront un certain nombre de conséquences, obtenues en portant l'attention sur la détermination algébrique du nombre de Lefschetz (au moyen des traces des autohomomorphismes des groupes de Betti); il contient en particulier (§ III) le théorème de Borsuk rappelé ci-dessus ([3]). D'autres conséquences de ce théorème seront développées plus tard : il est possible en effet d'en déduire des conclusions analogues au théorème de Borsuk-Ulam ([12]); il en résulte aussi une propriété des points fixes de représentations périodiques; enfin, on obtient d'autres théorèmes en l'appliquant à un recouvrement (« Überlagerung », et non pas « Überdeckung »), le groupe $\mathfrak{A}$ jouant le rôle du groupe des transformations de superposition (Decktransformationen). Je signalerai également que la démonstration que je donne ici est susceptible (sans en modifier le principe) d'une interprétation qui s'étend sans trop de difficultés aux représentations conservant les fibres (faserungstreue Abbildungen) d'espaces fibrés en eux-mêmes ([13]).

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux mathématiciens qui ont bien voulu m'aider de leurs conseils, particulièrement à M. H. Hopf dont les suggestions m'ont permis, à plusieurs reprises, d'apporter à ce travail d'heureuses modifications, ainsi qu'à M. K. Borsuk ([14]).

([11]) Je m'inspirerai pour cela de résultats obtenus par H. Hopf; *voir* A. H., p. 543, et H. Hopf, *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, I* (*Math. Annalen*, 100, 1928, pp. 579-608); *voir* aussi mon article *Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes* (*Bull. Sc. Math.*, t. 67, 1943, p. 158).

Il suffit par exemple, lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe d'ordre fini, de supposer qu'à l'ensemble obtenu en identifiant dans E les points équivalents par les représentations de $\mathfrak{A}$ s'applique le *théorème d'approximation* de H. Hopf (A. H., p. 543) (condition réalisée si cet ensemble est un polyèdre ou une variété topologique), ce qui signifie qu'on peut y remplacer une représentation dont tous les points fixes ne seraient pas réguliers par une représentation à points fixes réguliers aussi voisine que l'on veut de la première. En particulier, lorsque E est une variété, cette condition sera toujours remplie, quel que soit le groupe $\mathfrak{A}$, et il en résulte que le théorème est vrai sans aucune restriction lorsque E est une variété et lorsque le sous-groupe $\mathfrak{H}$ est vide (théorème A'). Ces hypothèses fort larges seront vérifiées d'elles-mêmes dans la plupart des applications.

([12]) *Fund. Math.* 20 [article cité dans ([3])], théorème II; A. H., p. 486.

([13]) H. Hopf et M. Rueff, *Über faserungstreue Abbildungen der Sphären* (*Comment. Math. Helvet.*, 11, 1938, pp. 49-61). *Voir* par exemple ma Note, *Une propriété des variétés topologiques fibrées* (*C. R. du Congrès des Sciences Mathématiques*, Liége, 1939, pp. 128-131), ou *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés et des complexes de recouvrement* (*Bull. Soc. Royale des Sciences de Liége*, 1941, pp. 246-260).

([14]) Ainsi que me l'a signalé M. Hopf, ces démonstrations pourraient aussi se faire en remplaçant la formule de Lefschetz-Hopf, dont on se sert ici, par la « formule généralisée d'Euler-Poincaré » (A. H., p. 530), et s'appliqueraient alors à des représentations simpliciales.

I. — Nombre algébrique des points fixes de représentations permutables. Cas de représentations à points fixes réguliers.

1. Nous dirons que deux représentations (2) R et S d'un même ensemble E en lui-même sont *permutables*, lorsque, pour tout point p de l'ensemble E, on a la relation

$$SR(\mathrm{p}) = RS(\mathrm{p}).$$

Nous dirons que la représentation T et le groupe $\mathfrak{G}$ (d'ordre fini ou non) de représentations G_i de E en lui-même sont *permutables*, lorsque, pour chaque indice i il existe un et un seul indice j, *et réciproquement*, tel que la relation

$$TG_i(\mathrm{p}) = G_j T(\mathrm{p})$$

soit vraie pour tout point p de E (les représentations G_i et G_j pouvant d'ailleurs être distinctes ou confondues).

On peut observer que T détermine ainsi dans $\mathfrak{G}$ un *auto-isomorphisme* (15) (et même deux automorphismes inverses), qui sera désigné par la notation $\mathfrak{T}$, et qui fait correspondre l'indice j à l'indice i :

$$A_j = \mathfrak{T}(A_i) \qquad (\text{avec } i = j \text{ ou } i \neq j).$$

Nous énoncerons d'abord quelques propriétés immédiates de représentations permutables.

1° Si R et S sont toutes deux permutables avec T, leurs produits SR et RS le sont également.

2° Si R est permutable avec T, une puissance quelconque de R est permutable avec une puissance quelconque de T.

3° Si R est permutable avec T^r, et S permutable avec T^s, alors les produits SR et RS sont permutables avec $T^{((r,s))}$, où $((r, s))$ désigne le plus petit commun multiple de r et s.

4° Si A est une représentation topologique permutable avec T, son inverse A^{-1} est aussi permutable avec T.

Dans la suite, l'ensemble E sur lequel sont définies les représentations considérées ici sera un polyèdre fini et de dimension homogène (16), ou, plus généralement, un ensemble auquel s'applique la formule de Lefschetz-Hopf.

---

(15) J'emploierai le terme « auto-isomorphisme », de préférence à celui de « automorphisme », en l'opposant au terme « autohomomorphisme » (appelé « endomorphisme » par certains auteurs).

(16) *Voir* les conditions imposées au polyèdre P dans A. H., p. 541, § 3, n° 1.

2. Je démontre maintenant le

LEMME. — *Soient A une représentation topologique de E en lui-même, et T une représentation de* E *en lui-même permutable avec A. Si* p_0 *est un point fixe régulier* ([10]) *pour T, alors* $A(p_0)$ *est aussi un point fixe (régulier) pour T, et a même indice* ([17]) *que* p_0.

La démonstration de ce lemme [que, dans un cas particulier, j'avais d'ailleurs donnée aussi d'une manière directe, dans une Note ([18]) publiée antérieurement, en y démontrant le théorème de BORSUK] repose sur le théorème de l'invariance topologique de l'indice d'un point fixe ([19]). Ce théorème peut s'énoncer ainsi ([20]) : Soit p_0 un point fixe régulier pour la représentation T de l'ensemble E en lui-même, et soit A une représentation topologique de E en lui-même. Alors le point $p'_0 = A(p_0)$ est un point fixe pour la représentation $T' = ATA^{-1}$ de E en lui-même, et a même indice que le point fixe p_0.

Par suite de la permutabilité des représentations A et T, cette représentation T' n'est autre que T, et le lemme ci-dessus est une conséquence immédiate de ce théorème d'invariance.

3. Ce lemme permet de démontrer le théorème A, où, comme il a été dit plus haut, E est maintenant un polyèdre fini de dimension homogène ([21]), et où T est une représentation à points fixes réguliers. Observons d'ailleurs que E pourrait être un ensemble d'un type plus général, auquel s'appliquerait la formule de Lefschetz-Hopf concernant le nombre algébrique des points fixes, ainsi que le lemme ci-dessus, relatif à l'invariance topologique de l'indice d'un point fixe.

THÉORÈME A. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec des représentations topologiques* ([1]) A_i *de* E *en lui-même. Désignons par* $\mathfrak{A}$ *le groupe engendré par ces représentations* A_i, *et par* $\mathfrak{G}$ *le sous-groupe de* $\mathfrak{A}$, *engendré par celles des représentations de* $\mathfrak{A}$ *qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T; désignons par* $\frac{a}{b}$ *l'indice de* $\mathfrak{G}$ *dans* $\mathfrak{A}$ ([*]). *Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de* $\frac{a}{b}$ ([*]).

([17]) A. H., p. 533; S. T., p. 327.

([18]) *Une généralisation d'un théorème de M. Borsuk concernant certaines transformations de l'Analysis situs* (*Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*; 1937, pp. 219-225).

([19]) A. H., pp. 539-540.

([20]) A. H., p. 540. On remarquera que ce théorème est valable aussi pour une variété (éventuellement non-triangulable), bien qu'il soit énoncé dans A. H. pour des polyèdres seulement.

([21]) A. H., p. 542, théorème I et théorème I *a*.

Remarque. — Si la représentation T est permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ de représentations A_i, sans être permutable avec chacune de ces représentations séparément, et si l'ordre (que nous désignerons par t) de l'autohomomorphisme $\mathfrak{T}$ que T détermine dans $\mathfrak{A}$ est fini (tel sera notamment toujours le cas lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe d'ordre fini), on constate aisément que la $m^{\text{ième}}$ puissance T^m de T est aussi permutable avec $\mathfrak{A}$, et détermine précisément dans ce groupe la substitution $\mathfrak{T}^m$, $m^{\text{ième}}$ puissance de $\mathfrak{T}$; cela signifie que si $A_q = \mathfrak{T}^m(A_i)$, on a la relation

$$T^m A_i(\mathrm{p}) = A_q T^m(\mathrm{p})$$

pour tout point p de E.

Puisque t est l'ordre de $\mathfrak{T}$, ce qui signifie que, pour tout indice i, on a la relation $A_i = \mathfrak{T}^t(A_i)$, il en résulte que la représentation T^t est permutable séparément avec chacune des représentations de $\mathfrak{A}$, et le théorème **A** sera applicable au nombre de Lefschetz de la représentation T^t, si cette représentation n'a que des points fixes réguliers, et à condition de définir maintenant $\mathfrak{B}$ comme sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de la $t^{\text{ième}}$ puissance de T (22).

4. Toutefois, je démontrerai d'abord le théorème **A** dans un cas plus particulier (théorème **A'**), lorsque le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide ($\mathfrak{A}$ doit être alors d'ordre fini, ce qui implique que les représentations A_i sont périodiques). Bien que ce théorème **A'** résulte évidemment du théorème **A**, dont la démonstration sera donnée plus loin, j'ai cru préférable de le démontrer d'abord, car, d'une part, sa démonstration, plus simple que celle du théorème **A** (puisque le groupe-quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ se réduit ici au groupe $\mathfrak{A}$ lui-même), met mieux en évidence le principe sur lequel repose la méthode utilisée; d'autre part, le théorème **A'** est suffisant pour la majorité des applications.

Remarquons aussi que, lorsque le groupe $\mathfrak{A}$ est cyclique et lorsque A (générateur de $\mathfrak{A}$) est permutable avec T, le théorème **A** prend la forme suivante :

---

(22) Lorsque t est un nombre premier, on peut établir (au moyen de la définition des traces qui figurent dans l'expression du nombre de Lefschetz) que le nombre de Lefschetz de T^t est congru (mod t) au nombre de Lefschetz de T; il en résulte que, lorsque $\frac{a}{b}$ est un multiple de t, nous pourrons alors affirmer que le nombre de Lefschetz de T est un multiple de t. En général cependant, t ne divise pas toujours $\frac{a}{b}$, et peut même être premier avec $\frac{a}{b}$, comme le prouve l'exemple suivant, où A est une représentation sans points fixes, périodique d'ordre 3, et où l'on a la relation de permutabilité $TA = A^{-1}T$; on y a $\frac{a}{b} = 3$ et $t = 2$: E est une circonférence S^1, A y est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et l'image par T d'un point quelconque de coordonnée angulaire u a pour coordonnée angulaire $2u$.

THÉORÈME $\mathbf{A}_r$. — *Soit A une représentation topologique de* E *en lui-même, et soit T une représentation permutable avec A. Si, parmi toutes les puissances de A, seules des puissances A^{kr} d'une même puissance A^r de A peuvent avoir des points fixes confondus avec des points fixes éventuels de T, alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de r.*

On peut encore déduire de ce théorème un théorème plus simple (théorème $\mathbf{A}'_a$), en supposant que A est périodique d'ordre fini a, et en prenant alors $r = a$, ce qui implique qu'aucune puissance de A (à l'exception de la représentation identique) n'a des points fixes en commun avec T. Une démonstration directe de ce théorème, lorsque E est la sphère à n dimensions, est donnée pour $r = a = 2$ (théorème de BORSUK) dans ma note citée plus haut (18).

5. Énoncé et démonstration du

THÉORÈME $\mathbf{A}'$. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec les éléments d'un groupe fini $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de représentations A_i de* E *en lui-même. Supposons que, à l'exception de la représentation identique, aucune représentation de $\mathfrak{A}$ n'ait des points fixes confondus avec des points fixes de T. Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de a.*

Démonstration. — Si T était une représentation sans points fixes, son nombre de Lefschetz serait nul, et le théorème $\mathbf{A}'$ serait évidemment vrai pour une pareille représentation T.

Considérons donc un point p_0, fixe pour T. Ce point p_0 appartient à une classe (23) [que je désignerai par la notation $\mathfrak{A}(p_0)$] de a points $A_i(p_0)$, qui, en vertu du lemme ci-dessus, sont tous fixes pour T et ont même indice que p_0. Ces a points sont tous distincts parce que, par hypothèse, T et les représentations A_i de $\mathfrak{A}$ (à l'exception de la représentation identique) n'ont pas de points fixes communs; en effet, si pour deux représentations A_1 et A_2 de $\mathfrak{A}$, on avait

$$A_1(p_0) = A_2(p_0),$$

on aurait aussi

$$A_2^{-1}A_1(p_0) = p_0,$$

et $A_2^{-1}A_1$ serait une représentation de $\mathfrak{A}$ ayant p_0 pour point fixe.

Soit maintenant p_1 également un point fixe pour T, différent des a points de la classe $\mathfrak{A}(p_0)$. Je dis qu'alors les deux classes $\mathfrak{A}(p_0)$ et $\mathfrak{A}(p_1)$ sont disjointes. En effet, si l'on avait

$$A_2(p_1) = A_1(p_0),$$

(23) Ces classes ne sont pas à confondre avec les « classes de points fixes » introduites par J. NIELSEN [*voir* plus loin, note (50)]; toutefois, lorsque l'on considère le groupe $\mathfrak{A}$ comme un groupe de transformations de superposition, il existe certaines relations entre elles. Cette question sera examinée dans un travail qui sera publié ultérieurement.

on aurait aussi

$$p_1 = A_2^{-1} A_1 (p_0),$$

et p_1 appartiendrait à la classe $\mathfrak{A}(p_0)$.

Puisque les points fixes de T sont, par hypothèse, en nombre fini, nous pouvons ainsi les répartir tous en un certain nombre de classes disjointes, chacune de ces classes contenant exactement a points fixes ayant tous le même indice. La somme algébrique des indices des points fixes qui appartiennent à une même classe est un multiple de a, et la somme algébrique des indices de tous les points fixes de T (ou nombre algébrique des points fixes de T) est, par conséquent, un multiple de a (qui pourrait d'ailleurs être nul). Le nombre de Lefschetz de T, qui lui est égal, au signe près ([24]), est donc également un multiple de a.

6. *Démonstration du théorème* **A**. — *Préliminaires*. Soit R une représentation permutable avec les éléments A_i (en nombre fini ou en infinité dénombrable) d'un groupe $\mathfrak{A}$ de représentations topologiques.

Appelons $\mathfrak{B}$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$, engendré par celles de ses représentations dont certains points fixes sont confondus avec certains des points fixes éventuels de R; c'est donc le plus petit sous-groupe de $\mathfrak{A}$ qui contient toutes ces représentations ([25]). Je désignerai dorénavant par B_i les éléments de ce sous-groupe $\mathfrak{B}$.

Je démontrerai en premier lieu que $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que, quel que soit l'élément A de $\mathfrak{A}$, on a

$$A \mathfrak{B} A^{-1} = \mathfrak{B}.$$

Cette démonstration comprendra deux parties :

1° Soit B une représentation appartenant à $\mathfrak{B}$, et ayant en commun avec R au moins un point fixe, soit p_1. Je démontrerai que toute représentation $B' = ABA^{-1}$, où A désigne une représentation quelconque de $\mathfrak{A}$, a aussi pour point fixe un point fixe de R, savoir le point $A(p_1)$.

En effet, puisque p_1 est fixe pour R, $A(p_1)$ est aussi fixe pour R. Mais, puisque $B(p_1) = p_1$, on a

$$ABA^{-1}[A(p_1)] = AB(p_1) = A(p_1),$$

et $A(p_1)$ est fixe pour ABA^{-1}.

2° Soit maintenant B une représentation de $\mathfrak{B}$, définie par une relation de la forme

$$B = B_k \dots B_2 B_1,$$

([24]) A. H., pp. 531 et 542.

([25]) Remarquons que, à elles seules, ces représentations ne constituent pas, en général, un groupe. *Voir* les exemples de représentations de S^2 en elle-même donnés à la fin du paragraphe III.

où chacune des représentations $B_1, \ldots, B_k$ a au moins un point fixe en commun avec R et est donc du type considéré au 1° ci-dessus.

Alors, quelle que soit la représentation A de $\mathfrak{A}$, on a

$$B' = ABA^{-1} = AB_k \ldots B_1 A^{-1} = AB_k \ldots B_2 A^{-1} AB_1 A^{-1}$$
$$= AB_k \ldots B_2 A^{-1} B'_1 = \ldots = B'_k \ldots B'_2 B'_1,$$

où les représentations $B'_1, \ldots, B'_k$ appartiennent aussi à $\mathfrak{B}$, en vertu du 1°.

Puisque $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$, le groupe-quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ existe et a, par définition, l'ordre $\frac{a}{b}$. Nous prouverons plus loin que $\frac{a}{b}$ est fini si R est une représentation à points fixes réguliers.

Si la représentation R présente au moins un point fixe, la représentation identique I de E en lui-même appartient certainement au sous-groupe $\mathfrak{B}$; lorsque, au contraire, R est sans points fixes, je dirai, par convention, que I est le seul élément de $\mathfrak{B}$.

Les éléments de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ ne sont en général pas des représentations, mais bien des classes de représentations, et sont de la forme $A\mathfrak{B}$; l'élément-unité de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ est la classe de restes $\mathfrak{B}$, qui contient la représentation identique de E en lui-même. Je désignerai par C_i (avec $C_1 = I$) un système de représentants de ces classes; on a donc la décomposition de $\mathfrak{A}$ suivant le sous-groupe $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{A} = C_1\mathfrak{B} + C_2\mathfrak{B} + \ldots + C_j\mathfrak{B},$$

avec $j = \frac{a}{b}$ lorsque l'indice de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ est fini.

7. Nous passons alors à la démonstration proprement dite, et appliquons les considérations qui précèdent à la représentation donnée $T = R$.

Remarquons d'abord que si T est une représentation sans points fixes, son nombre de Lefschetz est nul, et le théorème est évidemment vrai pour une pareille représentation.

Soit donc maintenant dans E un point p_0, fixe pour T; considérons la classe $\mathfrak{A}(p_0)$ de ses images $A_i(p_0)$ par toutes les représentations A_i de $\mathfrak{A}$. En raison de la décomposition du groupe $\mathfrak{A}$ indiquée ci-dessus, on peut écrire

$$\mathfrak{A}(p_0) = C_1\mathfrak{B}(p_0) + C_2\mathfrak{B}(p_0) + \ldots + C_j\mathfrak{B}(p_0)$$
$$\left(\text{avec } j = \frac{a}{b}, \text{ fini ou non}\right)$$

où le symbole $C_i\mathfrak{B}(p_0)$ désigne l'ensemble des images de p_0 par les représentations C_iB_k (B_k parcourant l'ensemble des éléments de $\mathfrak{B}$).

Je démontrerai maintenant que :

1° Le nombre des points distincts dans chacun des ensembles $C_i\mathfrak{G}(p_0)$ est indépendant du choix de C_i, et est donc constant pour un p_0 donné.

Comme on le voit aisément, ce nombre est égal à l'indice $\frac{b}{b_0}$ dans $\mathfrak{G}$ du sous-groupe $\mathfrak{G}_0$ engendré par celles des représentations de $\mathfrak{G}$ qui ont précisément p_0 pour point fixe ([26]). En effet, soient $C_1\mathfrak{G}$ et $C_2\mathfrak{G}$ deux éléments distincts de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, c'est-à-dire deux classes de restes de la décomposition de $\mathfrak{A}$ suivant $\mathfrak{G}$, et soient B_1 et B_2 deux éléments quelconques de $\mathfrak{G}$. Si l'on a

$$C_2B_1(p_0) = C_2B_2(p_0),$$

on a aussi

$$B_1(p_0) = B_2(p_0) \quad ([27]),$$

et donc

$$C_1B_1(p_0) = C_1B_2(p_0);$$

2° Les $j = \frac{a}{b}$ ensembles $C_i\mathfrak{G}(p_0)$ ainsi définis pour un point fixe donné p_0 sont disjoints. En effet, si l'on avait

$$C_1B_1(p_0) = C_2B_2(p_0) \qquad (\text{avec } C_1\mathfrak{B} \neq C_2\mathfrak{B} \text{ et } B_1 = B_2 \text{ ou } B_1 \neq B_2),$$

on aurait aussi

$$p_0 = B_1^{-1}C_1^{-1}C_2B_2(p_0) \qquad (\text{où } C_1^{-1}C_2 \text{ n'appartient pas à } \mathfrak{B});$$

mais, puisque $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$, il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément B_3 (transposé de B_2), tel que $C_1^{-1}C_2B_2 = B_3C_1^{-1}C_2$, et l'on aurait donc

$$p_0 = B_1^{-1}B_3C_1^{-1}C_2(p_0);$$

p_0 étant fixe à la fois pour T (par hypothèse) et pour $B_1^{-1}B_3C_1^{-1}C_2$, cette dernière représentation serait un élément de $\mathfrak{G}$, ce qui est impossible, puisque $B_1^{-1}B_3$ appartient à $\mathfrak{B}$, tandis que $C_1^{-1}C_2$ ne lui appartient pas.

Il en résulte qu'on peut faire correspondre au point fixe p_0 une classe $\mathfrak{A}(p_0)$ de points fixes qui ont tous le même indice que p_0 (pour T), en vertu du lemme démontré plus haut (§ I, n° 2); le nombre de ces points fixes correspondant à p_0 est un multiple de $\frac{a}{b}$ (d'une manière plus précise, ce nombre est égal à l'indice $\frac{a}{b_0}$ dans le groupe $\mathfrak{A}$ du sous-groupe $\mathfrak{G}_0$ engendré par celles de ses représentations

([26]) Nous avons supposé, dans toute cette première partie, que T n'a que des points fixes *réguliers*; il en résulte que ces points fixes sont en nombre fini, et que, par conséquent $\frac{b}{b_k}$ doit être fini pour chaque point fixe p_k.

([27]) Ceci implique $B_2^{-1}B_1(p_0) = p_0$; B_1 et B_2 appartiennent donc à une même classe de restes de $\mathfrak{B}$ par rapport à $\mathfrak{B}_0$.

qui ont p_0 pour point fixe; on voit aisément que $\frac{b}{b_0}$ est un nombre entier), et la somme algébrique des indices de tous les points fixes de cette classe est donc un multiple de $\frac{a}{b}$;

3° L'indice $\frac{a}{b}$ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{A}$ est nécessairement fini, parce que T est une représentation à points fixes réguliers, et n'a donc qu'un nombre fini de points fixes; nous venons de voir en effet que le nombre des points fixes de T est au moins égal à l'ordre du groupe-quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$. Nous avons en même temps établi que si $\frac{a}{b}$ n'est pas un nombre fini, T est nécessairement une représentation sans points fixes, et son nombre de Lefschetz est donc nul;

4° Si p_1 désigne un point fixe pour T, n'appartenant pas à la classe $\mathfrak{A}(p_0)$, alors les classes $\mathfrak{A}(p_0)$ et $\mathfrak{A}(p_1)$ sont disjointes. En effet, si l'on avait

$$C_1 B_1(p_1) = C_2 B_2(p_0) \qquad (\text{avec } C_1 = C_2 \text{ ou } C_1 \neq C_2 \text{ et } B_1 = B_2 \text{ ou } B_1 \neq B_2),$$

on aurait aussi

$$p_1 = B_1^{-1} C_1^{-1} C_2 B_2(p_0),$$

ou encore, puisqu'il existe dans $\mathfrak{G}$ un élément B_3 (transposé de B_1^{-1}) tel que $B_1^{-1} C_1^{-1} C_2 = C_1^{-1} C_2 B_3$,

$$p_1 = C_1^{-1} C_2 B_3 B_2(p_0),$$

où $B_3 B_2$ est un élément de $\mathfrak{G}$, et p_1 appartiendrait donc à la classe $\mathfrak{A}(p_0)$ ([28]).

Puisque par hypothèse les points fixes de T, qui sont tous réguliers, sont en nombre fini, nous pouvons ainsi les répartir tous en un certain nombre de classes disjointes, contenant respectivement $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b_0}, \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b_1}, \ldots, \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b_r}$ points distincts, et la somme algébrique des indices des points fixes dans chacune de ces classes est un multiple de $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b_i}$ désigne ici l'indice dans $\mathfrak{A}$ du sous-groupe $\mathfrak{G}_i$ engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont pour point fixe un point p_i, fixe pour T). Par conséquent, la somme algébrique des indices des points fixes de T (ou nombre algébrique des points fixes de T) est un multiple de $\frac{a}{b}$. Le nombre de Lefschetz de T, qui lui est égal au signe près, est donc également un multiple de $\frac{a}{b}$.

([28]) Lorsque T est permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ sans être permutable avec chacun de ses éléments séparément [ainsi qu'il a été observé (§ I, n° 3) après l'énoncé du théorème **A**], on peut remarquer que la substitution $\mathfrak{S}$ qui détermine un automorphisme dans $\mathfrak{A}$, induit également un autohomomorphisme dans le sous-groupe $\mathfrak{B}$, ce qui signifie qu'on a la relation

$$T\mathfrak{B} = \mathfrak{B}T.$$

8. De ces théorèmes se déduisent encore des théorèmes analogues, où l'on remplace le sous-groupe $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{A}$ par le sous-groupe $\mathfrak{G}^*$, engendré par celles de ses représentations qui possèdent des points fixes; $\frac{a}{b^*}$ désigne l'indice de $\mathfrak{G}^*$ dans $\mathfrak{A}$. La remarque qui suit l'énoncé du théorème **A**, n° 3, s'applique encore dans le cas présent.

On a d'abord le

Théorème **A***. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec des représentations topologiques* (7) *A_i de* E *en lui-même. Désignons par $\mathfrak{A}$ le groupe engendré par ces représentations A_i, et par $\mathfrak{G}^*$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$, engendré par celles de ces représentations qui présentent des points fixes; désignons par $\frac{a}{b^*}$ l'indice de $\mathfrak{G}^*$ dans $\mathfrak{A}$.*

Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de $\frac{a}{b^*}$.

Le Théorème **A*** contient le

Théorème **A**$'^*$. — *Le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec les éléments d'un groupe fini $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de représentations A_i sans points fixes de* E *en lui-même, est un multiple de a.*

Lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe cyclique, on a aussi les théorèmes $\mathbf{A}_c^*$ et en particulier $\mathbf{A}_c'^*$; ce théorème $\mathbf{A}_c'^*$ suffira d'ailleurs pour la plupart des applications.

Théorème $\mathbf{A}_c^*$. — *Soit A une représentation (topologique) périodique de* E *en lui-même; supposons que, parmi toutes les puissances de A, seules les puissances A^{kr} d'une même puissance A^r de A peuvent présenter des points fixes. Alors le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec A, est un multiple de r.*

Théorème $\mathbf{A}_c'^*$. — *Soit A une représentation périodique, d'ordre a, de* E *en lui-même, dont toutes les puissances (à l'exception de la représentation identique) sont sans points fixes. Alors le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec A, est un multiple de a.*

Les démonstrations données plus haut restent valables lorsqu'on y remplace $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}^*$; il résulte déjà du n° 6 (où l'on fait $R = I$, représentation identique de E en lui-même) que $\mathfrak{G}^*$ est également un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$; on pourrait reproduire d'une manière analogue la suite de la démonstration du théorème **A**, ou la démonstration du théorème **A**$'$, et obtenir ainsi une démonstration directe des théorèmes **A*** ou **A**$'^*$. Mais les théorèmes qu'on obtient de cette façon sont des corollaires des théorèmes déjà démontrés plus haut : en effet, il résulte encore du n° 6 (où $\mathfrak{G}^*$ joue maintenant le rôle de $\mathfrak{A}$) que $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe

invariant de $\mathfrak{B}^*$; par conséquent ([29])

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}^*} = \frac{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}}{\frac{\mathfrak{B}^*}{\mathfrak{B}}},$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{b^*}{b}\right),$$

$\left(\text{où } \frac{b^*}{b} \text{ désigne l'indice de } \mathfrak{B} \text{ dans } \mathfrak{B}^*\right)$, et $\frac{a}{b^*}$ est un diviseur de $\frac{a}{b}$, ce qui démontre le théorème.

II. — Cas de représentations dont tous les points fixes ne seraient pas réguliers.

1. Les démonstrations données précédemment (§ I) ne sont pas applicables à des représentations T dont les points fixes ne seraient pas tous réguliers, puisque l'indice de pareils points fixes n'est pas défini en général, et il est donc impossible dans ce cas d'énumérer ces points et de comparer leurs indices. Lorsque la représentation considérée T est quelconque, il conviendra de la remplacer, lorsque la chose est possible, par une représentation T_r à points fixes réguliers, ayant même nombre de Lefschetz que T et vérifiant les conditions imposées à T (permutabilité avec les éléments de $\mathfrak{A}$ et hypothèses concernant la coïncidence éventuelle des points fixes de T et de certaines représentations de $\mathfrak{A}$).

Remarque. — Lorsque la représentation T est permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ des représentations A_i, sans être permutable avec chaque représentation séparément, et lorsque l'auto-isomorphisme $\mathfrak{S}$ ainsi déterminé dans $\mathfrak{A}$ est d'ordre fini t, ainsi qu'il a été supposé déjà dans la remarque qui suit l'énoncé du théorème **A** (§ I, n° 3), c'est la représentation T^t qu'il faudra évidemment remplacer le cas échéant par une représentation $T_r^{(t)}$ ([30]) ayant même nombre de Lefschetz que T^t et vérifiant les conditions imposées à T^t.

2. Je me propose de rechercher ici quelques conditions *suffisantes* à imposer à l'ensemble E et au groupe $\mathfrak{A}$ (ainsi qu'au sous-groupe $\mathfrak{B}$, éventuellement) pour pouvoir affirmer que, quelle que soit la représentation donnée T de E en lui-même, il est alors possible de la remplacer par une représentation approchée T_r à points fixes réguliers. Lorsque ces conditions suffisantes seront

([29]) *Théorème d'isomorphie; voir* par exemple B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra I* (2e éd., Berlin, 1937, p. 149), ou H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig et Berlin, 1937, p. 33).

([30]) J'écris $T_r^{(t)}$, et non pas T_r^t, car la représentation à points fixes réguliers qui remplacera T^t ne sera, en général, pas la $t^{\text{ième}}$ puissance d'une représentation univoque et continue.

remplies, il ne sera plus nécessaire d'exiger, dans l'énoncé du théorème **A** (et de ses instances), que T soit une représentation à points fixes réguliers, puisque, s'il n'en est pas ainsi, T pourra toujours être remplacée par une représentation T_r à points fixes réguliers, pour laquelle le nombre de Lefschetz et le nombre $\frac{a}{b}$ auront même valeur que pour la représentation donnée T, et à laquelle la démonstration du paragraphe I sera applicable.

Je considérerai à cet effet l'ensemble E^0 des « points » obtenus en identifiant dans E des points « équivalents » relativement à $\mathfrak{A}$ (E^0 est le *domaine de discontinuité* ou *domaine fondamental* du groupe $\mathfrak{A}$ sur l'ensemble E), ce qui signifie qu'un « point » de E^0 est un ensemble de points de E qui se transforment l'un en l'autre par les représentations A_i; la topologie dans E^0 se déduit aisément de la topologie dans E. Je supposerai dans ce paragraphe que $\mathfrak{A}$ est un groupe *fini* d'ordre a (ce qui signifie que toutes les représentations A_i sont périodiques).

Il est possible d'introduire dans E^0 une métrique, à l'aide de la métrique donnée dans E (qui est en général un polyèdre), de la manière suivante : soient x et y deux points quelconques de E^0, et soient respectivement $\{x_i\}$ et $\{y_j\}$ dans E les deux suites de points équivalents qui définissent x et y. J'appelle distance $d(x, y)$ des points x et y de E^0 la borne inférieure des distances $d(x_i, y_j)$ des paires de points x_i, y_j de E (i et j prenant toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à a); cette borne est évidemment positive si les points x et y sont distincts; on constate aisément que les trois axiomes des espaces métriques [31] (axiomes d'identité, de symétrie et du triangle) sont vérifiés pour l'espace E^0 ainsi métrisé [32].

Je montrerai également que, si ε est un nombre positif arbitraire, il est toujours possible de déterminer un nombre positif ε', jouissant de la propriété suivante : lorsque x et y sont deux points quelconques de E^0 dont la distance $d(x, y)$ est inférieure à ε', alors on peut attribuer les indices j aux points y_j qui

---

([31]) A. H., p. 27, n° 3.

([32]) Il ne serait pas toujours possible d'introduire une métrique dans E^0 de cette manière si $\mathfrak{A}$ n'était pas d'ordre fini; en effet, prenons pour E une circonférence sur laquelle chaque point est déterminé par une coordonnée u ($-\pi \leqq u < \pi$ ou $0 \leqq u < 2\pi$), et prenons pour B la représentation topologique suivante, où $B(u)$ désigne la coordonnée de l'image du point de coordonnée u : pour $-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$, $B(u) = \frac{u}{2}$; pour $\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq 3\frac{\pi}{2}$, $B(u) = \frac{3}{2}\left(u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$. Dans l'ensemble E^0 obtenu en identifiant les points de E qui se correspondent par B et les puissances de B, il n'est pas possible d'introduire une métrique ainsi que nous l'avons fait plus haut, puisque la borne inférieure des distances de points x_i, y_i, provenant de deux points distincts compris tous deux entre $\frac{-\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, tend vers zéro lorsque l'exposant de la puissance de B croît indéfiniment. Il suffit cependant d'adjoindre à cette représentation B la représentation antipodique A de E en lui-même pour construire un groupe $\mathfrak{A}$ et un groupe $\mathfrak{B}^*$ (engendré par B), avec $\frac{a}{b^*} = 2$, auxquels les raisonnements faits plus haut ne seront pas applicables.

dans E correspondent à y, de manière à satisfaire la condition que voici : à chaque point x_i correspond un point y_i (auquel on a attribué le même indice i) tel que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$.

En effet, en vertu de la continuité uniforme ([33]) de chaque représentation A_i de $\mathfrak{A}$, pour un ε donné arbitrairement il existe un nombre positif δ_i tel que, si la distance de deux points p et q dans E est inférieure à δ_i, alors la distance $d[A_i(p), A_i(q)]$ de leurs images par A_i est inférieure à ε. La borne inférieure ε' de tous les δ_i (en nombre fini a) est positive. Mais, en raison de la définition de la distance dans E^0, si la distance $d(x, y)$ est inférieure à ε', il doit exister respectivement parmi les a points x_i qui correspondent à x et les a points y_j qui correspondent à y au moins une paire de points, que je désigne par x_0, y_0, dont la distance mutuelle $d(x_0, y_0)$ est inférieure à ε', et il en résulte qu'à chaque point $x_j = A_j(x_0)$ correspond un point $y_j = A_j(y_0)$ (de même indice j) vérifiant la relation $d(x_j, y_j) < \varepsilon$.

3. En vertu des relations de permutabilité entre T et les A_i, T représente un ensemble de points équivalents sur un ensemble de points équivalents, et détermine donc une représentation (univoque et continue) T^0 de E^0 en lui-même.

Je supposerai dans la suite de ce paragraphe que le théorème d'approximation de H. Hopf, concernant les représentations à points fixes non réguliers ([34]), est applicable à la représentation T^0 de E^0 en lui-même. Cette hypothèse signifie donc ici que, quel que soit le nombre positif ε, il est possible de construire une représentation T^0_ε de E^0 en lui-même, n'ayant que des points fixes réguliers, et telle que, pour tout point p^0 de E^0, la distance $d[T^0(p^0), T^0_\varepsilon(p^0)]$ des images de p^0 respectivement par T^0 et T^0_ε soit inférieure à ε.

Je démontrerai plus loin que, cette condition étant remplie, il est alors également possible de remplacer T par une représentation T_r à points fixes réguliers, ayant même nombre de Lefschetz que T, permutable avec les éléments de $\mathfrak{A}$, et telle que le sous-groupe $\mathfrak{B}_{(r)}$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T_r, soit confondu avec le sous-groupe $\mathfrak{B}$ défini plus haut [et relatif à T (§ I)] ou en soit un sous-groupe.

Observons que le théorème d'approximation de H. Hopf est toujours vrai lorsque E^0 est un polyèdre fini de dimension homogène ([35]) ou une variété [topologique, c'est-à-dire pas nécessairement triangulable ([36])]. Il en résulte que, dans certains cas, il est possible de déduire directement de la connais-

([33]) A. H., p. 102, théorème V.

([34]) A. H., p. 542, Satz II; *voir* aussi mon article, *Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes* (*Bull. Sc. math.*, t. 67, 1943, p. 158).

([35]) A. H., p. 542, Satz II.

([36]) Voir mon article cité ci-dessus ([34]). *Bull. Sc. math.*, t. 67, 1943, p. 158, théorème.

sance de E et des groupes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ que le théorème d'approximation s'applique à E^0 et T^0, et l'hypothèse faite ci-dessus à ce sujet devient donc alors superflue.

En particulier, lorsque E est une variété, l'ensemble E^{0*} obtenu par identification des points équivalents de E, à l'exception des points fixes des représentations de $\mathfrak{A}$, s'il en existe (c'est l'ensemble E^0 duquel on a enlevé les points « singuliers » provenant des points fixes des A_i), est une variété topologique, close (c'est-à-dire compacte) lorsque les A_i (à l'exception de I) sont toutes sans points fixes, ouverte (c'est-à-dire non compacte) lorsque des A_i présentent des points fixes. Lorsque le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide, T^0 est une représentation dont l'ensemble des points fixes est compact ([37]), et le théorème d'approximation ([36]) est applicable à la représentation T^0 de la variété E^{0*}, augmentée des points « singuliers » provenant des points fixes des A_i, en elle-même. Lorsque $\mathfrak{B}$ n'est pas vide, nous pouvons encore appliquer le théorème à condition que les points fixes des B_i ne soient pas des points d'accumulation de points fixes pour T.

Lorsque E est un polyèdre sans être une variété, il est sans doute possible d'établir que E^0 est aussi un polyèdre, quand les représentations de $\mathfrak{A}$ n'ont pas de points fixes. Dans le cas général, si E est une variété, l'étude de l'ensemble E^0 exigerait la connaissance de l'ensemble des points fixes des représentations appartenant à $\mathfrak{B}$; si E est seulement un polyèdre, il conviendrait de considérer l'ensemble des points fixes de toutes les représentations de $\mathfrak{A}$. Dans l'état actuel de nos connaissances relatives aux points fixes des représentations périodiques pour des nombres de dimensions supérieurs à 2, il ne paraît guère possible d'obtenir des résultats n'exigeant pas d'hypothèses particulières concernant E ou les représentations de $\mathfrak{A}$ ([38]). Au contraire, si E est une variété à deux dimensions, on sait que E^0 est aussi une variété, même si les A_i présentent des points ou des lignes fixes. Je ne m'arrêterai pas davantage à ces considérations, et me bornerai dans ce travail à supposer désormais que E^0 est un ensemble auquel on peut appliquer le théorème d'approximation mentionné plus haut.

4. Considérons maintenant, en vertu du théorème d'approximation, la représentation T^0 de E^0 en lui-même et une représentation T^0_r, n'ayant que des points fixes réguliers et voisine de T^0.

([37]) Dans le sens précisé dans mon article cité ci-dessus ([34]), note ([10]). On voit d'ailleurs que le théorème est encore applicable lorsque $\mathfrak{B}$ n'est pas vide, mais à condition que ceux des points fixes de T, qui sont fixes aussi pour des représentations de $\mathfrak{B}$, ne soient pas des points d'accumulation de suites infinies de points fixes de T; *voir* la note ([24]) du travail cité.

([38]) On peut consulter à ce propos les intéressants articles de P. A. Smith concernant les points fixes de représentations périodiques.

Je désigne, suivant la méthode usuelle ([39]), par $d(R, S)$ la « distance » de deux représentations R et S d'un ensemble A en un espace métrique B, c'est-à-dire la borne supérieure pour tout point p de A de la distance $d[R(p), S(p)]$.

Soit ε un nombre positif donné arbitrairement et soumis à certaines conditions précisées ci-dessous, et soit, comme plus haut, ε' le nombre positif tel que

$$d(x, y) < \varepsilon' \qquad \text{dans } E^0$$

implique

$$d(x_i, y_i) < \varepsilon \qquad \text{dans } E$$

(i variant de 1 à a), quels que soient les points x et y. J'imposerai alors à T_r^0 la condition

$$d(T^0, T_r^0) < \varepsilon',$$

où ε' est un nombre positif qui devra vérifier les conditions imposées ci-dessous.

Il en résulte que T_r^0 détermine (par recouvrement de E^0 par E) au moins une représentation univoque et continue T_r de E en lui-même, vérifiant la condition $d(T, T_r) < \varepsilon$. Cette représentation T_r n'a que des points fixes réguliers, puisqu'un point, fixe pour T_r, est recouvert par un point, fixe pour T_r^0. La réciproque n'est pas vraie, car un point fixe de T_r^0 peut aussi recouvrir un point p pour lequel $T_r(p) = A_i(p)$, où A_i n'est pas la représentation identique.

On voit aisément que T_r est aussi permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$, en vertu de sa construction, et est même permutable avec chaque représentation A_i séparément, si ε est assez petit.

En effet, soient A_i et A_j deux éléments distincts du groupe fini $\mathfrak{A}$; on a, par hypothèse,

$$TA_i(p) = A_i T(p), \qquad \text{pour tout point de E;}$$

démontrons que la relation

$$T_r A_i(p) = A_j T_r(p), \qquad \text{pour tout point de E}$$

implique que les représentations A_i et A_j coïncident sur l'ensemble des points $T(p)$, images par T de l'ensemble des points de E; dans ce cas, on pourra évidemment remplacer A_j par A_i dans le second membre de la dernière relation, et T_r et A_i seraient aussi permutables.

Supposons donc que $A_i A_j^{-1}$ ne soit pas la représentation identique sur $T(E)$: il y a alors un nombre positif α tel que, pour au moins un point p', on a

$$d[A_i T(p'), A_j T(p')] > \alpha.$$

D'autre part, si

$$TA_i(p) = A_i T(p) \qquad \text{et} \qquad T_r A_i(p) = A_j T_r(p) \qquad \text{pour tout point p de E,}$$

([39]) A. H., p. 55.

il résulte du choix de T_r qu'on aura

$$d[A_i T(p), A_j T_r(p)] < \varepsilon \quad \text{pour tout point p de E,}$$

où ε est choisi aussi petit qu'on veut. Mais, par suite de la continuité uniforme de A_j, on peut faire correspondre à tout nombre positif donné β $\left(\text{que nous prendrons ici égal à } \frac{\alpha}{2}\right)$ un nombre positif γ tel que si la distance $d(p, q)$ est inférieure à γ, alors $d[A_j(p), A_j(q)] < \beta$. Il en résulte qu'il suffit que ε soit inférieur à γ pour avoir

$$d[A_j T_r(p), A_j T(p)] < \beta \qquad \text{pour tout point p de E.}$$

Prenons maintenant pour ε la valeur du plus petit des deux nombres $\frac{\alpha}{2}$ et γ. Alors, par la relation du triangle, on a

$$d[A_i T(p'), A_j T(p')] \leqq d[A_i T(p'), A_j T_r(p')] + d[A_j T_r(p'), A_j T(p')]$$

ou

$$\alpha \leqq \varepsilon + \beta < \alpha,$$

ce qui est impossible.

D'autre part enfin, les deux représentations T et T_r ont même type d'homologie, et, par conséquent, même nombre de Lefschetz, dès que ε est suffisamment petit.

5. Il reste à démontrer qu'il est possible de prendre un ε assez petit pour que soient vérifiées les conditions de non-coïncidence des points fixes : si A_i est telle que T et A_i n'ont pas de points fixes communs, il faut construire T_r de telle manière que A_i et T_r n'aient pas non plus des points fixes communs.

On sait que l'ensemble des points fixes d'une représentation R d'un ensemble compact métrique en lui-même est un ensemble fermé. Soit en effet p un point-limite d'une suite de points fixes $\{p_m\}$; on a

$$d[p, R(p)] \leqq d(p, p_m) + d[p_m, R(p_m)] + d[R(p_m), R(p)],$$

où les premier et troisième termes du second membre sont aussi petits que l'on veut, tandis que le deuxième terme est nul, et l'on a donc $R(p) = p$.

Il en résulte que, si A_i et T n'ont pas de points fixes communs ([40]), l'ensemble des points fixes de A_i est séparé de l'ensemble des points fixes de T par une distance positive r([41]), puisque E est un ensemble compact métrique.

Je montrerai alors que l'on peut prendre ε assez petit pour que les points fixes de T_r soient aussi voisins que l'on veut des points fixes de T, et ils ne pourront donc pas coïncider avec des points fixes de A_i. Il reste par conséquent

([40]) Je ne considère ici que le cas où A_i présente au moins un point fixe, puisque la proposition énoncée est évidemment vraie lorsque A_i n'a pas de points fixes.

([41]) A. H., p. 102, corollaire du lemme de Lebesgue.

à démontrer qu'on peut choisir ε suffisamment petit afin que, pour tout point p'_0, fixe pour T_r, il existe au moins un point p_0 fixe pour T, avec $d(p_0, p'_0) < r$.

Tout point p de E, dont la distance à l'ensemble des points fixes de T est au moins égale à r, est séparé de son image $T(p)$ par une distance au moins égale à un certain nombre positif η_1. En effet, puisque l'ensemble des points dont la distance à l'ensemble des points fixes de T est inférieure à r est ouvert, son complément (qui contient au moins un point en vertu de la définition de r) est fermé, et est compact métrique puisque E est un ensemble compact métrique. Sur ce nouvel ensemble compact métrique, la distance $d[p, T(p)]$, qui est une fonction continue, atteint effectivement sa borne inférieure ([42]), et cette borne inférieure η_1 ne peut donc pas être nulle, puisque cet ensemble ne contient aucun point fixe pour T.

Considérons maintenant dans E un point quelconque p dont la distance à n'importe quel point fixe de T est au moins égale à r. On a alors

$$d[p, T(p)] \geqq \eta_1 > 0.$$

Mais

$$d[p, T_r(p)] \geqq |d[p, T(p)] - d[T(p), T_r(p)]|,$$

où le premier terme de la différence qui figure au second membre est au moins égal à η_1, tandis que le deuxième est inférieur à ε par hypothèse, et il suffit donc de choisir un ε inférieur à η_1 pour que $d[p, T_r(p)]$ soit positif, ce qui implique que p n'est pas fixe pour T_r.

III. Une généralisation du théorème de Borsuk.

1. J'introduis ici une définition nouvelle. Je dis qu'une représentation T d'un ensemble (généralement un polyèdre) C (de dimension homogène n) en lui-même est *L-quasi-sphérique*, lorsque son nombre de Lefschetz $l(T)$ (qui est aussi, au signe près, le nombre algébrique de ses points fixes) est égal, au signe près, à une expression de la forme $1 + k.c(T)$, où $c(T)$ désigne le degré de T, et où k est un entier quelconque (positif ou négatif) *non nul*. Si $k = (-1)^n$ (n désignant la dimension de C), je dis que T est *L-sphérique*.

Lorsque toutes les représentations d'un polyèdre C en lui-même sont L-quasi-sphériques ou L-sphériques, je dis que ce polyèdre lui-même est respectivement L-quasi-sphérique ou L-sphérique ([43]).

([42]) A. II., p. 100.

([43]) Remarquons que k n'est pas nécessairement déterminé d'une manière univoque par le polyèdre E, ce qui signifie qu'à différentes représentations d'un même polyèdre L-quasi-sphérique en lui-même peuvent correspondre des valeurs différentes de k; de même, il existe des polyèdres bordés dont toutes les représentations (respectant les bords) sont L-quasi-sphériques (même avec $k \neq \pm 1$); il s'agit alors évidemment du degré local de T; *voir* par exemple mon article *Détermination du nombre algébrique des points fixes de certaines représentations* (*Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, 1939, pp. 319-328).

La dénomination ainsi adoptée se justifie de la manière suivante : le plus simple des polyèdres L-sphériques, au sens de la définition donnée ci-dessus, est la sphère à n dimensions, pour laquelle k ne peut avoir qu'une seule valeur, $(-1)^n$, puisque $l(T) = 1 + (-1)^n . c(T)$ ([44]).

Il en est évidemment de même pour toutes les représentations de tous ceux des polyèdres finis simplement fermés ([45]) à n dimensions qui ont les mêmes nombres de Betti que la sphère à n dimensions; tels sont notamment l'espace projectif à un nombre impair de dimensions, les espaces de Poincaré, les espaces lenticulaires ou cycliques à n dimensions, etc. Tous ces polyèdres sont L-sphériques.

Je définis également ici un type de représentations d'un polyèdre C en lui-même, plus générales que les représentations L-quasi-sphériques. Je dirai en effet qu'une représentation T, de degré $c(T)$, d'un polyèdre C en lui-même, est *L-quasi-sphérique mod m* (m étant un nombre entier), si son nombre de Lefschetz est égal, au signe près, à une expression de la forme $1 + k' . m + k'' . c(T)$, où k' et k'' sont des entiers quelconques, dont le second est toujours différent de zéro. Lorsque $k'' = (-1)^n$, je dirai que T est *L-sphérique mod m*. (L'intérêt de ces dernières définitions apparaîtra dans certaines applications de ces notions et des théorèmes démontrés dans cet article.) On définirait, de même que ci-dessus, des polyèdres L-quasi-sphériques *mod m* ou L-sphériques *mod m*.

On peut observer qu'une représentation L-quasi-sphérique ou L-sphérique est L-quasi-sphérique ou L-sphérique relativement au module zéro, ainsi que relativement à n'importe quel module.

Je dirai encore que T est une représentation *L-quasi-sphérique au sens large*, lorsqu'il faut remplacer, dans l'expression de $l(T)$ qui définit la L-quasi-sphéricité, le degré $c(T)$ par une racine $r^{\text{ième}}$ de $c(T)$ (r entier positif). On obtient également des définitions analogues de la L-sphéricité, ainsi que de la L-quasi-sphéricité *mod m* et de la L-sphéricité *mod m, au sens large*, et l'on définit de même les polyèdres L-quasi-sphériques ou L-sphériques au sens large. Un exemple de polyèdre L-sphérique au sens large est fourni par l'espace projectif complexe à n dimensions K^n (qui est une variété à $2n$ dimensions réelles); le nombre de Lefschetz de toute représentation T de K^n en lui-même a la forme $1 + u + u^2 + \ldots + u^n$, où u est un entier quelconque et où le degré $c(T)$ est égal à u^n ([46]).

J'indiquerai ici certaines propriétés de nature plutôt négative, concernant des représentations L-quasi-sphériques d'un polyèdre C en lui-même : en général (lorsque C n'est pas lui-même quasi-sphérique), le produit de deux

---

([44]) A. H., p. 533,

([45]) A. H., p. 280.

([46]) H. Hopf, *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* (*Journal für reine und angew. Math.*, 163, 1930, p. 84, § 5, relations (20), (21 *a*), (21 *b*), théorème VI).

représentations L-quasi-sphériques n'est pas nécessairement L-quasi-sphérique, et, réciproquement, un produit de deux représentations non-L-quasi-sphériques peut être L-quasi-sphérique; *a fortiori*, il en sera de même pour la L-quasi-sphéricité *mod m*, puisque nous avons vu qu'une représentation L-quasi-sphérique est aussi L-quasi-sphérique *mod m* pour tout *mod m*. Je montrerai même, d'une manière plus précise, que la L-sphéricité d'une représentation T de C en lui-même n'implique pas nécessairement la L-sphéricité de ses puissances T^t, et que, réciproquement, la L-sphéricité de T^t n'implique pas nécessairement la L-sphéricité de sa racine $t^{\text{ième}}$, la représentation T. De ces exemples résulteront les propriétés énoncées ci-dessus, puisque les puissances de T constituent un cas particulier de produits de représentations.

Les exemples de représentations que je construirai ici sont des représentations du tore (à deux dimensions) en lui-même. Désignons respectivement par P et M parallèles et méridiens de ce tore, et par u et v les coordonnées respectives d'un point quelconque dans ce système de référence (P, M). On sait que le tore peut être considéré comme le produit topologique des deux circonférences P et M, c'est-à-dire comme l'ensemble des couples de valeurs (u, v). Le groupe de Betti du tore pour la dimension 1 a pour base, par exemple, un parallèle et un méridien.

1° Exemple de représentation T' L-sphérique du tore en lui-même, le carré T'^2 de cette représentation n'étant pas L-sphérique. Prenons pour T' la représentation (topologique) qui fait correspondre au point (u, v) le point (v, u): cette représentation échange les parallèles et les méridiens. On a

$$T'(\mathrm{P}) \sim \mathrm{M},$$
$$T'(\mathrm{M}) \sim \mathrm{P};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T' dans le groupe de Betti du tore pour la dimension 1 est nulle, et T' est donc L-sphérique. Mais on a aussi

$$T'^2(\mathrm{P}) \sim T'(\mathrm{M}) \sim \mathrm{P};$$
$$T'^2(\mathrm{M}) \sim T'(\mathrm{P}) \sim \mathrm{M};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T'^2 dans le groupe de Betti de la dimension 1 est égale à 2, et T'^2 n'est pas L-sphérique.

2° Exemple de représentation T'' du tore en lui-même, non-L-sphérique, et dont le carré T''^2 est L-sphérique.

Prenons pour T'' la représentation qui représente le point (u, v) sur le point $(-2u+v, -2u)$; elle représente un parallèle sur la somme d'un parallèle et d'un méridien, parcourue deux fois et changée de signe, et représente un méridien sur un parallèle. On a

$$T''(\mathrm{P}) \sim -2\mathrm{P} - 2\mathrm{M},$$
$$T''(\mathrm{M}) \sim \mathrm{P};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T'' dans le groupe de Betti pour la dimension 1 est égale à -2, et T'' n'est pas L-sphérique. Mais on a aussi

$$T''^2(\mathrm{P}) \sim -2T''(\mathrm{P}) - 2T''(\mathrm{M}) \sim 4\mathrm{P} + 4\mathrm{M} - 2\mathrm{P} = 2\mathrm{P} + 4\mathrm{M},$$
$$T''^2(\mathrm{M}) \sim T''(\mathrm{P}) \sim -2\mathrm{P} - 2\mathrm{M};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T''^2 dans le groupe de Betti de la dimension 1 est nulle, et T''^2 est L-sphérique.

2. Considérons à nouveau la représentation T et le groupe $\mathfrak{A}$ définis dans le paragraphe I.

Ici nous n'exigerons même pas que T soit permutable séparément avec chacune des représentations de $\mathfrak{A}$, mais uniquement que l'ordre t de la substitution qu'elle définit dans ce groupe soit fini. [*Voir* la remarque après l'énoncé du théorème **A** (§ I, n° 3).]

Il convient, d'autre part, que T' soit une représentation à points fixes réguliers; toutefois, ainsi que nous l'avons démontré plus haut (§ II), cette condition est superflue lorsque E est une variété tandis que $\mathfrak{G}$ est vide (théorèmes portant l'indice supérieur $'$); rappelons que, dans ce cas, aucune restriction n'est donc à imposer quant à la nature de E, ou des représentations A_i ou T'. Les théorèmes portant cet indice $'$ seront donc valables pour des représentations T absolument quelconques lorsque E est une variété; nous supposerons dorénavant que, pour les autres formes du théorème, T' est à points fixes réguliers ou peut être remplacée par une représentation approchée à points fixes réguliers (par exemple, lorsque le groupe $\mathfrak{A}$ et l'ensemble E sont tels que l'ensemble des points équivalents constitue une variété ou un polyèdre).

Nous supposons maintenant que la représentation T' est une représentation L-sphérique ou L-quasi-sphérique. (Tel sera notamment toujours le cas lorsque E est un ensemble L-sphérique ou L-quasi-sphérique.) Les hypothèses du théorème **A** étant supposées remplies, il résulte de ce théorème que le nombre de Lefschetz de T' est un multiple de $\frac{a}{b}$; mais, puisque T' est L-quasi-sphérique, cette conclusion prend la forme

$$l(T') = 1 + k.c(T') \equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{a}{b}\right).$$

Comme d'autre part $c(T') = c'(T)$ ([47]), il en résulte que le degré $c(T)$ de T est premier avec $\frac{a}{b}$; d'où le

Théorème **B**. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec un groupe $\mathfrak{A}$ de représentations topologiques A_i de* E *en lui-même. Supposons que*

([47]) S. T., p. 284.

la substitution que T détermine ainsi dans ces indices i soit d'ordre fini t; supposons que T^t est L-quasi-sphérique. Soit $\mathfrak{G}$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$ engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T^t; désignons par $\frac{a}{b}$ l'indice de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$. Alors le degré de T est premier avec $\frac{a}{b}$.

On obtient également les théorèmes **B'** (où le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide), $\mathbf{B}_c$ (où le groupe $\mathfrak{A}$ est cyclique, tandis que T est permutable avec la représentation périodique qui engendre $\mathfrak{A}$; ici il faudra donc supposer que T est une représentation L-quasi-sphérique), $\mathbf{B}'_c$ (analogue à $\mathbf{B}_c$, et, en outre, sous-groupe $\mathfrak{B}$ vide), et aussi les théorèmes $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{B}'^*$, $\mathbf{B}^*_c$ et $\mathbf{B}'^*_c$, où $\mathfrak{B}$ est remplacé par $\mathfrak{B}^*$, sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes. Pour ces quatre derniers théorèmes, la définition de t n'intervient plus que par la condition suivante : T^t est une représentation L-quasi-sphérique. Nous avons vu que cette condition est toujours vérifiée lorsque E est un polyèdre L-quasi-sphérique (une sphère à n dimensions, par exemple). Dans ce cas, l'énoncé de ces théorèmes se simplifie considérablement; je donnerai ici, à titre d'exemple, l'énoncé des théorèmes $\mathbf{B}^*$ et $\mathbf{B}'^*$. Ce dernier théorème suffit pour la plupart des applications.

Théorème $\mathbf{B}^*$. — *Soit T une représentation d'un ensemble L-quasi-sphérique* E *en lui-même, permutable avec un groupe $\mathfrak{A}$ de représentations topologiques de* E *en lui-même, et supposons que l'automorphisme que T induit dans le groupe $\mathfrak{A}$ soit d'ordre fini; soit $\frac{a}{b^*}$ l'indice dans $\mathfrak{A}$ du sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui peuvent présenter des points fixes.*

Alors le degré de T est premier avec $\frac{a}{b^*}$.

Théorème $\mathbf{B}'^*$. — *Soit T une représentation d'un ensemble L-quasi-sphérique* E *en lui-même, permutable avec un groupe fini $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de représentations de* E *en lui-même, dont aucune (à l'exception de la représentation identique) ne présente de points fixes.*

Alors le degré de T est premier avec a.

Il résulte, en particulier, de tous ces théorèmes que, les conditions de l'énoncé étant supposées remplies, le degré de T ne peut certainement pas être nul, et la représentation T considérée est donc une représentation *essentielle* ([48]).

Remarquons qu'on peut ajouter au théorème **B** la conclusion plus précise :

([48]) A. H., p. 372 et p. 492.

le degré de T est une solution de la congruence

$$kc^t(T) \equiv -1 \qquad \left(mod\ \frac{a}{b}\right)$$

(où k est le coefficient qui figure dans la définition de la L-quasi-sphéricité de T). Il en résulte notamment que, lorsque k est en module différent de l'unité, $\frac{a}{b}$ et k sont nécessairement premiers entre eux. Lorsque T' est L-sphérique, $k=(-1)^n$, et $c(T)$ vérifie la congruence

$$c^t(T) \equiv (-1)^{n+1} \qquad \left(mod\ \frac{a}{b}\right).$$

Le théorème de Borsuk, cité dans l'introduction de cet article, est un corollaire du théorème $\mathbf{B}'^*$ (ou même $\mathbf{B}'^*_c$), où E est la sphère à n dimensions (qui est L-sphérique), et où $\mathfrak{A}$ est le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par la représentation antipodique de la sphère en elle-même.

Tous les théorèmes énoncés ci-dessus restent valables si T' est seulement L-quasi-sphérique ou L-sphérique au sens large (cas de l'espace projectif complexe), ou même L-quasi-sphérique $mod\ \frac{a}{b}$; d'une manière plus générale encore, on pourra enfin obtenir des conclusions analogues lorsque T' est L-quasi-sphérique $mod\, m$, le nombre m étant un diviseur de $\frac{a}{b}$, mais il conviendra de remplacer alors $\frac{a}{b}$ par m dans la conclusion de ces théorèmes; cela suffira encore pour affirmer, par exemple, que T est une représentation essentielle, c'est-à-dire de degré différent de zéro.

Comme on le voit par l'exemple suivant, la condition de non-coïncidence des points fixes est essentielle dans l'énoncé de ces théorèmes : Soit T une représentation du polyèdre L-sphérique E (comportant plus d'un point; par exemple, une sphère à n dimensions S^n) en lui-même, qui représente tous les points de E en un même point p_0 (qui est donc fixe pour T), et soit A une représentation périodique de E en lui-même, ayant notamment p_0 pour point fixé (et, au demeurant, absolument quelconque) (par exemple, dans le cas de S^n, la représentation de S^n en elle-même, par symétrie relativement au diamètre passant par p_0, en supposant S^n plongée dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions). Alors on a, pour tout point p de E,

$$AT(p) = A(p_0) = p_0,$$

et

$$TA(p) = T[A(p)] = p_0;$$

et les représentations A et T sont permutables; or, T, qui représente tout l'ensemble E en un seul point, est de degré zéro, et ce degré n'est premier

avec aucun nombre; aucun théorème analogue au théorème **B** n'est donc valable pour cette représentation T.

3. On peut encore déduire du théorème **A** un

THÉORÈME Γ. — *Soit* E *un polyèdre dont tous les nombres de Betti* (*excepté* p^0) *sont nuls* (par exemple un élément à n dimensions, un espace projectif à n dimensions quand n est pair, etc.).

Soit T une représentation de E *en lui-même, permutable avec un groupe* $\mathfrak{A}$ *de représentations topologiques de* E *en lui-même. Supposons que la substitution que T détermine dans* $\mathfrak{A}$ *soit d'ordre fini t. Désignons par* $\mathfrak{B}$ *le sous-groupe de* $\mathfrak{A}$, *engendré par celles de ses représentations qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de* T^t. *Alors* $\mathfrak{B}$ *coïncide avec* $\mathfrak{A}$ ([49]).

La démonstration de ce théorème est immédiate, puisque le nombre de Lefschetz de T^t, qui est un multiple de $\frac{a}{b}$, est égal à l'unité.

4. Je ferai suivre ces théorèmes de quelques remarques qui se rattachent au même ordre d'idées.

Il résulte de la démonstration, donnée dans le paragraphe I, des théorèmes **A** et **A'**, que la condition « T (*ou* T^t) *est permutable* (*séparément*) *avec les représentations du groupe* $\mathfrak{A}$ » implique l'existence d'au moins $\frac{a}{b}$ points fixes distincts de T (ou T^t). Cette condition (de permutabilité) nous fournit donc un nombre minimum de points fixes.

Observons que ce nombre minimum de points fixes ne s'apparente que de loin au nombre minimum de points fixes que donne la théorie des « classes de points fixes » de J. NIELSEN ([50]). En effet, si l'on considère E comme un polyèdre de recouvrement, les représentations de $\mathfrak{A}$ jouant le rôle des transformations de superposition (« Decktransformationen »), les $\frac{a}{b}$ points fixes obtenus ici recouvrent tous un même point fixe dans le polyèdre de base. Cet aspect de la question sera d'ailleurs étudié dans un article ultérieur; il en sera de même pour l'étude des représentations conservant les fibres (« faserungstreue Abbildungen ») d'une variété fibrée.

Signalons encore que, si le groupe $\mathfrak{A}$ contient au moins une représentation B ayant un nombre fini (non nul) de points fixes p_i, ces points sont des « points

([49]) On sait que chaque représentation de $\mathfrak{A}$ présente au moins un point fixe, en vertu de la forme du nombre de Lefschetz de toute représentation de E en lui-même (A. H., p. 532).

([50]) J. NIELSEN, *Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen* (*Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, 3, 1924, pp. 246-260) et *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen* (*Acta Mathematica*, 50, 1927, pp. 189-358, ainsi que *Acta Math.*, 53 et 58).

de périodicité » pour T, ce qui signifie que, pour chacun de ces points p_i, il existe un exposant k_i, fini et différent de zéro, tel que $T^{k_i}(p_i) = p_i$. Soit en effet p_0 un point fixe de B; supposons que $T^t(p_0) \neq p_0$ (autrement, k_0 serait au plus égal à t), Puisque $BT^{xt} = T^{xt}B$ pour tout entier x, on a alors aussi

$$BT^{xt}(p_0) = T^{xt}B(p_0) = T^{xt}(p_0),$$

et les points T^{xt} (avec x entier quelconque) sont fixes également pour B; mais, la représentation B n'ayant par hypothèse qu'un nombre fini de points fixes, il en résulte qu'il y a deux exposants mt et $kt\,(m < k)$ tels que $T^{mt}(p_0) = T^{kt}(p_0)$, ($mt$ étant le plus petit entier non négatif jouissant de cette propriété, ce qui implique $m = 0$), et il existe donc un exposant kt pour lequel $T^{kt}(p_0) = p_0$; la « période » k_0 de T au point p_0 est au plus égale à kt.

5. Voici enfin quelques observations relatives à l'application pratique des théorèmes énoncés dans cet article.

Une représentation T, permutable avec un groupe $\mathfrak{A}$, étant donnée, il pourra être utile de déterminer les sous-groupes de $\mathfrak{A}$ avec lesquels T est encore permutable ([51]). En effet, il peut même arriver que le sous-groupe $\mathfrak{B}^*$ de $\mathfrak{A}$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes, soit confondu avec $\mathfrak{A}$ lui-même (ce qui rend trivial le théorème), tandis qu'il existe cependant des sous-groupes $\mathfrak{A}'$ (avec lesquels T est encore permutable) de $\mathfrak{A}$, pour lesquels le sous-groupe correspondant $\mathfrak{B}'^*$ est différent de $\mathfrak{A}'$ ([52]).

Lorsqu'on applique le théorème **A** (ou $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{A}'_c$) et pas $\mathbf{A}^*$ (ou $\mathbf{A}'^*$, $\mathbf{A}^*_c$, $\mathbf{A}'^*_c$) (ainsi que les formes correspondantes du théorème **B**), on pourra parfois préciser davantage les résultats en appliquant également ce théorème aux produits TA_i de T par des représentations A_i de $\mathfrak{A}$, n'ayant pas leurs points fixes confondus avec les points fixes de T'. (Ces produits sont évidemment encore permutables avec A.) Ceci peut conduire à un nouveau sous-groupe $\mathfrak{B}$, et donc à un nouveau quotient $\frac{a}{b}$ ([53]).

Considérons encore une représentation T à laquelle le théorème **A** (ou l'un des théorèmes analogues qui se déduisent de celui-ci) est applicable. Sa conclusion concerne le nombre de Lefschetz de T', lorsque T n'est pas permutable avec tous les éléments de $\mathfrak{A}$ séparément, et il sera, en général, malaisé d'en tirer directement une conclusion relative au type d'homologie de la représentation T elle-même, dès que t est différent de 1. D'autre part, on a vu que, si T' est L-quasi-sphérique, la conclusion du théorème **B**, que l'on peut maintenant appliquer, concerne directement le degré de T elle-même. Puisqu'on a montré

([51]) Si l'on considère T comme un « opérateur » dans le groupe $\mathfrak{A}$, ces sous-groupes seront des sous-groupes « admissibles », au sens de la théorie des groupes.

([52]) *Voir* aussi ([25]), ainsi que l'exemple II, § III, n° 9, note ([57]).

([53]) *Cf.* les exemples I *a*, et I *b*, § III, n° 8, et II, § III, n° 9, note ([59]).

plus haut qu'une puissance d'une représentation peut être L-quasi-sphérique ou L-sphérique sans que cette représentation elle-même le soit, et puisque toutes les puissances de T' sont, elles aussi, permutables séparément avec chaque représentation de $\mathfrak{A}$, on pourra essayer d'établir qu'une puissance $T^{x'}$ de T' est L-quasi-sphérique $\left(\mathrm{mod}\ \frac{a}{b}\right)$, ce qui permettra alors d'appliquer le théorème **B** au lieu du théorème **A**, et d'affirmer que le degré de T est premier avec $\frac{a}{b}$. Cependant, lorsqu'il s'agit des théorèmes **A**, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_c$ ou $\mathbf{A}'_c$ (et pas des théorèmes $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}'^*$, $\mathbf{A}^*_c$ ou $\mathbf{A}'^*_c$), il sera nécessaire de s'assurer que des représentations de $\mathfrak{A}$, qui n'avaient pas de points fixes communs avec T', n'ont pas acquis des points fixes communs avec $T^{x'}$; en d'autres termes, il importe que le sous-groupe $\mathfrak{B}$ (défini à l'aide de T') soit maintenant encore le sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de $T^{x'}$ (qui remplace ici T'). En effet, le nombre des points fixes des puissances de T' est monotone croissant, et l'on ne pourra donc pas, en général, augmenter indéfiniment l'exposant de T sans provoquer de nouvelles coïncidences de points fixes; en procédant de cette manière, on devra généralement remplacer b par b^* (ordre du sous-groupe $\mathfrak{B}^*$ de $\mathfrak{A}$ engendré par celles de ses représentations qui ont des points fixes).

6. Je donnerai, pour terminer ce paragraphe, quelques exemples de représentations vérifiant les hypothèses du théorème **B**.

Remarquons d'abord que si T' est une représentation permutable avec une représentation A, tout produit de puissances de T' et de A est également permutable avec A. Nous ferons usage de cette remarque pour la construction des derniers exemples de représentations donnés plus loin.

A. Exemple de représentation T de la sphère à n dimensions S^n en elle-même, de degré impair quelconque $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique A (5) de S^n en elle-même. (Ces représentations vérifient le théorème de Borsuk, cité dans l'introduction.)

Nous supposons S^n plongée dans un espace euclidien à $n+1$ dimensions R^{n+1}, où elle est le lieu des points dont la distance à un point donné est constante. Nous définirons la représentation demandée par récurrence relativement au nombre de dimensions n.

Considérons d'abord sur la circonférence S^1 une coordonnée angulaire u, variant de 0 à 2π; désignons par u la coordonnée d'un point quelconque p de S^1, et par u' la coordonnée du point $T(p)$; définissons T par la relation $u'=(2m+1)u$ (m entier, positif ou négatif). Cette représentation T laisse fixes les deux pôles p_0 et p_1, de coordonnées respectives $u=0$ et $u=\pi$. Les représentations T et A sont permutables, puisque les coordonnées des points $AT(p)$ et $TA(p)$ sont respectivement égales à $(2m+1)u+\pi$ et $(2m+1)(u+\pi)$. Le degré de T est égal à $2m+1$.

Montrons maintenant comment la connaissance d'une représentation d'une sphère S^{k-1} à $k-1$ dimensions ($k \geqq 2$) en elle-même, de degré $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique de S^{k-1} en elle-même, et présentant au moins une paire de points fixes p_0^0 et p_1^0 diamétralement opposés (sur S^{k-1}) permet de construire une représentation T de S^k en elle-même, de degré $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique de S^k en elle-même, et présentant au moins une paire de points fixes p_0 et p_1 diamétralement opposés (sur S^k).

Considérons sur S^k un diamètre p_0p_1, un grand cercle C passant par ces deux points, ainsi que l'ensemble des sphères S^{k-1} à $k-1$ dimensions (toutes disjointes, et toutes proprement dites à l'exception des deux pôles p_0 et p_1), sections de S^k par l'ensemble des hyperplans à k dimensions (de R^{n+1}), perpendiculaires au diamètre p_0p_1. Sur chacune de ces S^{k-1} (sauf aux deux pôles), le grand cercle C détermine une paire de points p_0^0, p_1^0 diamétralement opposés sur S^{k-1}. Prenons alors pour T la représentation qui conserve globalement chaque S^{k-1}, et qui, sur chacune de ces S^{k-1}, est précisément la représentation de S^{k-1} en elle-même supposée connue déjà, de degré $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique de S^{k-1} en elle-même, et possédant notamment les deux points fixes p_0^0 et p_1^0 sur cette S^{k-1}. On voit aisément que T est une représentation univoque et continue de S^k en elle-même, permutable aussi avec la représentation antipodique de S^k en elle-même et ayant notamment les deux pôles p_0 et p_1 pour points fixes. Le degré de T est encore égal à $2m+1$ ([54]).

7. B. On peut obtenir aussi un exemple de représentation de S^1 en elle-même, permutable avec un groupe cyclique $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de rotations de S^1 de la manière suivante : divisons S^1 en a arcs égaux a_i^1, et prenons pour T la représentation univoque et continue qui représente linéairement chacun de ces arcs sur la somme des $a-1$ autres arcs partiels, changée de signe; chacun des a sommets de cette décomposition est un point fixe pour T; T est de degré $-(a-1)$, et est permutable avec toutes les rotations $\left(\text{d'angle } \frac{2i\pi}{a}\right)$ de $\mathfrak{A}(t=1)$; $\mathfrak{B}$ est vide, ainsi d'ailleurs que $\mathfrak{B}^*$, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b^*} = a$.

Ces exemples de représentations de S^1 en elle-même permettent de construire sans peine des exemples analogues de représentations du tore à deux dimensions en lui-même, ou même, d'une manière plus générale, des représentations du tore à n dimensions (produit topologique de n circonférences) en lui-même.

Remarquons que toutes les représentations précédentes vérifient déjà le théorème $\mathbf{B}'^*_c$ (cas le plus simple).

([54]) On voit également que T, ainsi définie, n'est pas une représentation à points fixes réguliers lorsque n est supérieur à 1, car, pour chaque k, le grand cercle C mentionné plus haut est fixe point par point.

8. C. Je terminerai en fournissant encore quelques exemples de représentations de la sphère à deux dimensions S^2 en elle-même, concernant notamment un groupe $\mathfrak{A}$ non cyclique et une représentation T non permutable séparément avec chaque représentation de $\mathfrak{A}$.

Considérons S^2 comme la surface extérieure d'un cube, dont nous numérotons les faces de a_1^2 à a_6^2, a_1^2 et a_4^2, a_2^2 et a_5^2, a_3^2 et a_6^2 étant respectivement des paires de faces opposées. Appelons A la représentation périodique (d'ordre 6) de S^2 en elle-même, qui représente linéairement a_1^2 sur a_2^2, a_2^2 sur a_3^2, ..., a_6^2 sur a_1^2. A est sans points fixes, ainsi que A^3 (qui est la représentation antipodique de S^2 en elle-même) et A^5; par contre, A^2 et A^4 ([55]) présentent chacune deux points fixes, les deux sommets diamétralement opposés $a^0_{1,3,5}$ ([56]) et $a^0_{2,4,6}$.

I. Groupe $\mathfrak{A}$ cyclique, engendré par A.

a. Prenons pour première représentation T_1 la représentation qui représente chacune des six faces de S^2 linéairement sur la somme des cinq *autres* faces, chaque arête étant fixe point par point (chaque sommet est donc fixe également); T_1 est de degré -5 et est permutable séparément avec les représentations A^t de $\mathfrak{A}$ $(t=1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est ici le groupe des représentations A^2, A^4, $A^6=I$, qui ont toutes des points fixes confondus avec des points fixes de T_1; (ici le groupe $\mathfrak{B}^*$ est identique au groupe $\mathfrak{B}$); $\frac{a}{b}=2$.

b. Prenons pour représentation T_2 le produit A^3T_1, où T_1 est définie comme dans *a*), ci-dessus. T_2 est de degré $+5$, présente 6 points fixes isolés (qui sont les milieux de chacune des six faces de S^2), et est encore permutable séparément avec les représentations A^t de $\mathfrak{A}(t=1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide, $\frac{a}{b}=6$.

c. Prenons une représentation T_3 définie comme suit : a_1^2 est représentée linéairement sur les cinq autres faces; a_2^2 est représentée sur l'ensemble des cinq faces $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2$; a_3^2 est représentée sur l'ensemble des cinq faces $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_6^2$; a_4^2, a_5^2 et a_6^2 sont représentées respectivement sur les trois ensembles de cinq faces qui sont diamétralement opposés aux images de a_1^2, a_2^2 et a_3^2. Les deux arêtes $a^1_{2,6}$ et $a^1_{3,5}$ sont fixes point par point. T_3 est de degré -5; la relation de permutabilité de T_3 avec A est $T_3A=A^5T_3$, d'où les quatre autres relations se déduisent; T_3 est permutable avec A^3; T_3^2 est permutable séparément avec chaque élément de $\mathfrak{A}(t=2)$; tous les sommets et toutes

([55]) Les puissances paires de toute représentation d'une sphère à un nombre *pair* de dimensions en elle-même présentent toujours chacune au moins un point fixe, puisque ce sont des représentations dont le degré est positif.

([56]) Je désigne par la notation $a^1_{i_1,i_2}$ l'arête commune aux deux faces $a^2_{i_1}$ et $a^2_{i_2}$, et par $a^0_{i_1,i_2,i_3}$ le sommet commun aux trois faces $a^2_{i_1}$, $a^2_{i_2}$ et $a^2_{i_3}$.

les arêtes sont fixes pour T_3^2; $\mathfrak{B}$ contient [comme dans I, *b*, ci-dessus] les trois représentations A^3, A^4, $A^6 = I$; $\frac{a}{b} = 2$.

d. Prenons pour représentation T_4 le produit $A^3 T_3$. T_4 est de degré $+5$; comme dans l'exemple précédent, $t = 2$; puisque $T_4^2 = (A^3 T_3)^2 = T_3^2$, les autres conclusions sont analogues à celles de I, *c*.

II. Groupe $\mathfrak{A}$ non cyclique (et même non-commutatif).

9. Soit $\mathfrak{A}$ le groupe engendré par la représentation A, définie plus haut (§ III, n° 8, C), et par une représentation C, qui est une rotation d'angle π de S^2 autour de l'axe joignant les milieux des faces a_1^2 et a_4^2. Le groupe $\mathfrak{A}$ est d'ordre 24 et n'est pas commutatif ([57]).

a. Prenons pour première représentation la représentation T_1 considérée ci-dessus (§ III, n° 8, I, *a*); elle est permutable avec A et C, donc aussi avec tous les éléments de $\mathfrak{A}(t=1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ contient les 12 éléments engendrés par A^2 et C; $\frac{a}{b} = 2$.

b. Considérons la représentation T_2 définie dans I, *b*; elle est permutable séparément avec tous les éléments de $\mathfrak{A}(t=1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ contient 8 éléments; c'est le sous-groupe invariant engendré par A^3 et C([58]); $\frac{a}{b} = 3$([59]).

c. Prenons maintenant la représentation T_3 définie ci-dessus, I, *c*; T_3^2 est permutable séparément avec chaque élément de $\mathfrak{A}(t=2)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est le même que dans II, *a*, ci-dessus; $\frac{a}{b} = 2$.

d. Prenons enfin $T_4 = A^3 T_3$; on a encore $t = 2$, $T_4^2 = T_3^2$, et les autres conclusions sont les mêmes que ci-dessus, II, *c*.

([57]) Remarquons que le sous-groupe $\mathfrak{B}^*$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes, est identique à $\mathfrak{A}$ lui-même; en effet, A^2, C, ainsi que CA^3 présentent des points fixes, et appartiennent donc certainement à $\mathfrak{B}^*$; il en résulte que $A = C^{-1}.CA^3.A^{-2}$ est aussi un élément de $\mathfrak{B}^*$, et $\mathfrak{B}^*$ est engendré, comme $\mathfrak{A}$ lui-même, par les éléments A et C. Ce résultat est à rapprocher de celui qui a été obtenu plus haut : le sous-groupe contenant les éléments à points fixes dans le groupe *cyclique* engendré par A seul y est cependant un sous-groupe d'indice 2 (car A n'appartient pas à ce sous-groupe).

([58]) On remarquera que A^3 est un élément de $\mathfrak{B}$, bien que A^3 soit une représentation sans points fixes; *voir* ([25]).

([59]) En appliquant le théorème $\mathfrak{B}$ aux deux représentations T_1 et T_2 (dont on sait qu'elles ont le même degré en valeur absolue, puisque l'une se déduit de l'autre par multiplication par une représentation topologique), on obtient une conclusion plus précise qu'en utilisant seulement l'une de ces deux représentations, puisqu'on sait maintenant que leurs degrés sont respectivement premiers avec 2 et avec 3. $c(T)$ est donc aussi premier avec 6.

LES SYSTÈMES CANONIQUES

D'UNE

VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A PLUSIEURS DIMENSIONS

PAR M. MAX EGER.

INTRODUCTION.

Depuis la fin du siècle dernier les propriétés principales des courbes algébriques (et partant, des êtres algébriques ∞^1) sont fixées, du moins en ce qui concerne les propriétés invariantes par transformations birationnelles. En particulier la théorie des séries linéaires de groupes de points sur une courbe a reçu de ses fondateurs sa forme presque définitive, sinon dans ses méthodes, du moins dans ses résultats essentiels : c'est ainsi qu'apparût l'importance du rôle de la *série canonique* d'une courbe de genre $p > 1$, série invariante par toute transformation birationnelle.

Il semble que l'extension, naturelle et tentante, des propriétés dégagées dans le cas des courbes algébriques, aux surfaces, puis aux variétés algébriques de dimension quelconque soit aisée. En réalité on ne put aboutir qu'à une *analogie partielle* avec le cas curviligne : c'est ainsi que la théorie des courbes canoniques d'une surface, puis des hypersurfaces canoniques (à $n-1$ dim.) d'une variété à n dimensions fut élaborée d'assez bonne heure. Encore convient-il de remarquer la différence du mode d'invariance de ces systèmes : alors que la série canonique d'une courbe algébrique est invariante pour tout le groupe des transformations birationnelles, déjà dans le cas des surfaces le système canonique, défini au moyen de l'adjonction par exemple, n'est plus un *invariant absolu*. D'une manière précise ce système demeure inchangé seulement pour les transformations birationnelles sans exception, c'est-à-dire pour les *transformations birationnelles topologiques*. Dans le cas contraire s'introduisent comme parties intégrantes du système transformé quelques-unes des courbes exceptionnelles de la transformation. D'où la nécessité, si l'on s'attache à tout prix à obtenir des éléments invariants par toute transformation birationnelle, d'épurer le système canonique brut afin de parvenir au système canonique pur ou réduit complètement invariant.

On peut d'ailleurs se placer à un autre point de vue, ce qui revient à restreindre le groupe des transformations dont on étudie les invariants. En ne conservant du groupe total que le sous-groupe des transformations birationnelles topologiques, on obtient des propriétés invariantes nommées *relatives*, par opposition aux invariants du groupe complet appelés *absolus*. Avec cette distinction les propriétés des variétés algébriques les plus faciles à mettre en évidence sont les propriétés invariantes relatives. L'étude des invariants absolus est plus délicate, car cette étude présuppose que l'on domine complètement le groupe des transformations birationnelles d'une variété de dimension quelconque, ce qui n'est pas le cas. Dominerait-on complètement ce groupe, il n'est malgré tout pas sûr que l'on épuiserait ainsi la liste des invariants, car il semble naturel que des sous-variétés de dimensions 0, 1, ..., $n-2$, soient aussi susceptibles d'introduire des caractères invariants. Cette considération des propriétés attachées à des sous-variétés de dimension quelconque ne fut pas immédiatement génératrice de résultats. Il fallut attendre 1932 où, grâce aux travaux de Severi (1), s'ouvrit l'ère de nouvelles recherches. La raison de ce retard est facile à expliquer : dans le cas des hypersurfaces d'une variété on possède un critère pour *identifier* comme appartenant à une même *classe* deux hypersurfaces, ce critère est celui de *l'équivalence*, de sorte que l'on étudie en réalité des *classes invariantes d'équivalence*. Une telle notion manquait pour des sous-variétés d'une dimension inférieure de plus d'une unité à celle de la variété support. Par la suite les travaux de Severi (2) visant à combler cette lacune ont permis, par l'introduction du concept de variétés équivalentes, la recherche systématique de nouvelles propriétés.

Dans le cas spécial des surfaces, Severi lui-même, Enriques, Segre, Campedelli ont dégagé les invariants fondamentaux. Pour le cas des variétés à 3 dimensions, deux mémoires de Segre (3) ont épuisé la question, en introduisant, pour une telle variété, d'une part des séries de groupes de points, d'autre part des séries de courbes invariantes.

Un travail semblable restait à accomplir pour une variété de dimension quelconque : une des principales difficultés de ce cas résidait dans le choix d'un algorithme qui se prêtât d'une manière aisée à des formules générales, car l'exemple de $n = 3$ donnait des relations numériquement assez compliquées. Cette extension fut réalisée en 1937 simultanément par deux auteurs, d'une manière indépendante, d'une part dans un Mémoire de J. Todd (4), d'autre part dans des Notes des *Comptes rendus* publiées par l'auteur du présent travail (5).

---

(1) *Commentarii math. Helvetici*, Vol. 4, 1932.
(2) *Cf.* aussi J. Todd, *Annales of Math*, 2e série, Vol. 35, 1934.
(3) *Mém. Reale Acc. d'Italia*, Vol. V, 1934, p. 479.
(4) *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, Vol. 43, 1937, p. 127.
(5) *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 92 et 217.

Ces deux extensions généralisent des propriétés déjà connues, mais en partant de points de vue différents. Le premier des Mémoires indiqués utilise la méthode algébrico-géométrique de l'école italienne; le deuxième accorde la préférence à la méthode transcendante, point de vue de l'école française et qu'ont illustré les travaux de Picard et de Humbert. Toutefois cette dernière méthode présente un inconvénient : elle n'est pas absolument générale et requiert l'existence sur la variété de formes différentielles de première espèce, ou formes de Picard. Elle ne semble donc pas s'appliquer aux variétés régulières : cependant il est possible d'étendre les propriétés introduites à de telles variétés, en procédant par récurrence et prenant par définition certaines combinaisons de systèmes covariants comme système canonique. J'ajoute d'ailleurs que l'emploi du jacobien a été adopté avec fruit par certains géomètres de l'école italienne, notamment par M. de Franchis (1).

Le premier Chapitre du présent Mémoire est consacré à l'introduction, par la considération des formes différentielles de première espèce, c'est-à-dire par voie transcendante, des systèmes canoniques de toute dimension sur une variété irrégulière. L'objet du Chapitre II est l'extension des concepts de variétés canoniques au cas de variété régulière : dans ce but il commence par l'examen de certains problèmes géométriques, problèmes de contact, dont la solution conduit à celle de la définition directe et générale des systèmes canoniques par voie purement géométrique. Dans le troisième Chapitre sont groupées des formules auxquelles on peut donner le nom de théorèmes d'adjonction, car ces formules permettent d'exprimer les variétés canoniques de variétés immergées dans une V_n donnée au moyen de l'*intersection* de ces variétés avec certaines combinaisons *ne faisant intervenir que les systèmes canoniques* de V_n elle-même. Ces formules s'opposent ainsi à celles développées dans le Chapitre précédent qui introduisent les systèmes canoniques de *sous-variétés de* V_n. Ce dualisme des formules se reflète dans l'emploi de deux symbolismes dont les liens sont examinés au n° 24. Ces formules, bien que non nécessaires au développement de la théorie, sont néanmoins utiles dans la pratique, ainsi que le montrent les exemples du Chapitre IV, en permettant de présenter sous une forme nouvelle les résultats des chapitres antérieurs, forme intéressante dans certaines applications. Une partie de celles-ci fait l'objet du quatrième Chapitre : j'ai dû me borner dans cette matière, tant à cause du champ étendu des applications possibles, qu'à cause des difficultés techniques qui subsistent dans l'emploi des formules générales malgré le symbolisme mis en œuvre. C'est ainsi que je n'ai pas examiné le comportement des systèmes canoniques (*invariants relatifs*) par une transformation birationnelle sinon arbitraire, du moins assez générale : cette question fait d'ailleurs l'objet d'un Mémoire

(1) *Rendiconti. Circolo. Math. Palermo*, t. LVI, 1932, p. 223; t. LX, 1936, p. 161.

de J. Todd (1). En outre cet Auteur envisage également les invariants de nature arithmétique analogues au genre, introduits par les nouvelles variétés (2). Dans le présent travail j'ai laissé ce point de vue de côté, de même que l'interprétation topologique ou l'application aux problèmes d'équivalence qui seraient cependant d'une étude intéressante.

Dans le dessein d'obtenir une théorie transcendante, uniforme, valable pour toutes les variétés, j'ai été amené à élargir le champ des formes différentielles au delà des formes de Picard. Dans deux Notes aux *Comptes rendus* (3), je reprends la question des variétés canoniques sous des bases nouvelles, par la considération des « formes permises ». Cette notion n'est pas exploitée dans le présent Mémoire, celui-ci étant en majeure partie de rédaction antérieure à celle des Notes précitées et sa publication ayant été retardée par les événements. D'autre part le développement de la Théorie des variétés canoniques à partir de la notion de forme permise fera l'objet d'un Mémoire ultérieur.

En terminant cet exposé, je voudrais exprimer ma déférente gratitude à M. Élie Cartan, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à mes recherches, ainsi qu'à M. René Garnier pour la bienveillante compétence avec laquelle il a bien voulu examiner ce travail.

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES SYSTÈMES CANONIQUES.

I. — Rappel des résultats relatifs aux courbes et aux surfaces.

1. Considérons sur une courbe C de genre $p > 0$ une forme différentielle (4) de première espèce $u = dI$. Le *groupe jacobien* de cette forme, c'est-à-dire le groupe des points doubles de l'involution (*transcendante*) $I = \text{const.}$, se compose, comme l'on sait, d'un groupe de la *série canonique* (5) de la courbe. La connaissance de cette série permet de trouver le groupe jacobien, ou plus

(1) *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, ser. 2, Vol. 5, 1937, p. 117.

(2) *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, Vol. 43, 1937, p. 190.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 82 et t. 211, 1940, p. 156.

(4) Dans ce Mémoire, nous adopterons la terminologie et les notations de M. É. Cartan sur les formes différentielles envisagées comme formes algébriques (*cf.* par exemple : *Leçons sur les Invariants Intégraux*, p. 55). De plus une lettre minuscule grecque désignera une forme différentielle rationnelle quelconque (une variété *polaire* d'une telle forme sera une variété polaire pour quelqu'un de ses coefficients); une minuscule latine, une forme de première espèce. (On sait d'ailleurs qu'une telle forme est nécessairement une différentielle exacte.)

(5) L'introduction, par voie géométrique, de la série canonique est due à Brill et Noether. L'identité d'un groupe de la série canonique et du groupe jacobien d'une intégrale de première espèce résulte simplement de la relation, due à Riemann, entre les intégrales abéliennes de première espèce et les courbes adjointes de degré $n - 3$, d'une courbe plane de degré n.

précisément, de déterminer un groupe de points équivalent sur C à ce groupe, d'une involution définie par une relation de la forme $\varphi = 0$, où $\varphi = df$ est une forme différentielle rationnelle quelconque attachée à C, élément d'une intégrale abélienne.

En effet, reprenant un raisonnement connu, considérons sur C le rapport

$$\delta = \frac{df}{dt} : \frac{dI}{dt} = \frac{\varphi}{u},$$

où t est une variable uniformisante (locale) de C. δ est une *fraction rationnelle du point de* C, puisque u et φ sont des différentielles rationnelles. Par suite le groupe des zéros et celui des pôles de δ sont équivalents. Or le groupe des zéros est formé du groupe jacobien de φ, que l'on désignera par la notation $\{\varphi\}$. Le groupe des pôles comprend : 1° le groupe des zéros du dénominateur de δ; 2° les groupes provenant des singularités (polaires et logarithmiques) de f. On voit tout de suite qu'un pôle r-uple de f est un pôle $(r+1)$-uple de δ, et qu'un point singulier logarithmique est pôle simple de δ.

On obtient par suite, en définitive,

$$\{\varphi\} \equiv \{u\} + (r+1)\,P_\varphi + L_\varphi, \tag{1}$$

où P_φ désigne les pôles de f et L_φ les points singuliers logarithmiques.

En particulier si f est une *fraction rationnelle*, on obtient la formule classique donnant le groupe jacobien d'une *série linéaire*

$$\{\varphi\} \equiv \{u\} + 2P_\varphi. \tag{1'}$$

Remarquons enfin que la formule (1') est susceptible de nous donner une *définition directe* de la *série* $\{u\}$: il suffit en effet de montrer que la différence $\{\varphi\} - 2P_\varphi$ *est indépendante* de φ, ce que la considération d'un rapport tel que δ fournit immédiatement.

2. Passons maintenant au cas d'une surface, et tout d'abord considérons une surface d'irrégularité positive. Soient sur une telle surface S, u une forme différentielle totale de première espèce, élément d'une intégrale simple de Picard, déterminant un faisceau (*transcendant*) de courbes, solution de $u = 0$. Envisageons le groupe jacobien $\{u\}$ de ce faisceau : en un point de ce groupe, on a, par définition, $u = 0$ pour toutes les directions de déplacement sur S de sorte qu'un tel point est donné par : $\frac{\partial I}{\partial t_1} = 0$, $\frac{\partial I}{\partial t_2} = 0$, où t_1 et t_2 sont deux variables uniformisantes en ce point. Dans le cas général $\{u\}$ comporte un nombre fini de points (1) et n'est autre qu'un groupe de la série W de Severi de la surface S (2).

(1) Il n'en serait pas ainsi, par exemple, si le faisceau $u = 0$ était composé avec un faisceau algébrique (SEVERI, *loc. cit.* dans la note suivante, p. 289).

(2) SEVERI, *Comm. Math. Helvetici*, 4, 1932, p. 268.

Si l'on envisage sur S une deuxième forme différentielle de première espèce, v, elle détermine en général, avec la première, une *courbe des contacts* de u et v sur S : lieu des points où il existe une droite tangente commune à chacune des courbes des faisceaux $u = 0$ et $v = 0$ passant par ce point, ou encore lieu des points où $[uv] = 0$, en notant par $[uv]$ le produit extérieur des deux formes u et v. Désignons une telle courbe par $\{u, v\}$ et remarquons que l'on a les inclusions suivantes : $\{u\} \subset \{u, v\}$; $\{v\} \subset \{u, v\}$. La courbe $\{u, v\}$, manifestement algébrique, est fournie par l'annulation du jacobien

$$\frac{D(u, v)}{D(t_1, t_2)} = 0, \qquad \text{ou } [u, v] = 0.$$

Ce n'est autre qu'une courbe du *système canonique* (impur) de S.

3. De même que pour le cas d'une courbe, le *système canonique* et la série W (que l'on nomme encore *série canonique*) d'une surface permettent de résoudre de nombreux *problèmes de contact entre faisceaux*, algébriques ou non (mais, dans ce cas, solutions d'équations différentielles algébriques sur la surface). Dans ce but nous emploierons une méthode de récurrence consistant à comparer entre elles deux courbes relatives à des problèmes de contact différant seulement par la nature d'une seule forme différentielle : cette méthode sera fréquemment appliquée dans la suite.

Prenons d'abord une forme différentielle de première espèce, u, et une différentielle de fraction rationnelle φ, et proposons-nous la recherche de la *courbe des contacts* $\{u, \varphi\}$. Soit v une deuxième forme différentielle de première espèce, et considérons le rapport (1)

$$\delta = \frac{D(u, \varphi)}{D(u, v)} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Procédant de la même manière qu'au n° 1 pour une courbe algébrique, on trouve que la courbe des zéros de la *fraction rationnelle* δ n'est autre que la courbe des contacts cherchée : $\{u, \varphi\}$.

La courbe polaire de δ comprend : $\{u, v\}$ lieu des pôles du premier ordre, puis la courbe polaire de φ soit P_φ. (Il est entendu que dans P_φ chaque lieu de pôles r-uples est compté r fois : ainsi, si φ est la différentielle d'une fraction rationnelle possédant une courbe polaire simple, S, alors $P_\varphi = 2S$.) On a donc l'équivalence

$$\{u, \varphi\} \equiv \{u, v\} + P_\varphi. \tag{2}$$

(1) Il est entendu, ici et dans tous les cas analogues ultérieurs, que ce rapport est à concevoir comme le quotient des deux déterminants $\frac{D(u, \varphi)}{D(t_1, t_2)}$ et $\frac{D(u, v)}{D(t_1, t_2)}$; où t_1 et t_2 sont encore des variables uniformisantes locales de la surface. (La théorie des déterminants fonctionnels apprend d'ailleurs que le choix de ces variables n'influe par sur δ.)

Soient maintenant φ et ψ deux différentielles rationnelles et recherchons leur courbe des contacts $\{\varphi, \psi\}$. La fraction rationnelle

$$\delta' = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\varphi, u)} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

fournit de la même manière que plus haut

$$\{\varphi, \psi\} \equiv \{\varphi, u\} + P_\psi, \tag{2'}$$

ce qui, confronté avec (2), donne

$$\{\varphi, \psi\} \equiv \{u, v\} + P_\varphi + P_\psi. \tag{3}$$

4. La formule (3) permet de trouver une courbe équivalente à la *jacobienne d'un réseau*, R, par la méthode suivante, méthode dite de *dégénérescence* que nous retrouverons encore plus loin (n° 16) : prenons dans un système linéaire ∞^3, Σ, (*un tissu*), deux faisceaux sans courbe commune d'équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Leur courbe des contacts est donnée par (3), où $P_\varphi \equiv P_\psi \equiv 2S$, et où S est une courbe de tissu. On vérifie de la manière la plus simple les équivalences précédentes en prenant, si F et G sont les deux courbes bases du faisceau φ, d'équations respectives $f = 0$, $g = 0$, soit $\varphi = d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$, soit $\varphi = d \log\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}$. Dans le premier cas φ admet la courbe polaire *double* $G \equiv S$; dans le deuxième les deux courbes polaires simples $F \equiv G \equiv S$. Dans les deux cas on a bien $P_\varphi \equiv 2S$. Si maintenant les faisceaux φ et ψ varient continûment jusqu'à acquérir une courbe en commun C, la courbe $\{\varphi, \psi\}$ définie par (3) reste équivalente à elle-même et se scinde à la limite dans les courbes suivantes : la courbe C et la jacobienne J du réseau R somme linéaire ou joint des positions limites des deux faisceaux.

On en conclut, puisque $C \equiv S$, que l'on a

$$J \equiv \{u, v\} + 3S. \tag{4}$$

5. Proposons-nous maintenant la recherche du *groupe jacobien* $\{\varphi\}$ d'un faisceau linéaire.

Pour cela envisageons sur $\{\varphi, u\}$ le rapport déjà utilisé maintes fois $\delta = \frac{\varphi}{u}$. Le groupe des zéros de δ comprend évidemment le groupe $\{\varphi\}$ et en outre un autre groupe ε, dont les points sont caractérisés ainsi : la courbe $\{\varphi, u\}$ est tangente à la courbe φ en un point simple de celle-ci, de sorte que, par suite de la définition de $\{\varphi, u\}$, cette courbe est aussi tangente à la courbe u, passant par ce point. Le groupe ε annule donc le dénominateur de δ, et par suite, s'élimine lorsque l'on écrit l'équivalence des zéros et des pôles de δ.

(Une analyse plus précise se montre d'ailleurs que ε n'est autre que le groupe des *points d'osculation des faisceaux* φ et u.)

Le groupe des pôles de δ comprend en dehors du groupe $\{u\} + \varepsilon$: 1° le

groupe intersection de $\{\varphi, u\}$ avec la *courbe polaire* de φ, en dehors des points-bases de celui-ci, et un tel groupe est formé de pôles doubles pour δ et en outre 2^{o} le groupe de φ formé de pôles simples. Or un point commun à $\{u, \varphi\}$ et à P_{φ} en dehors de φ^2 n'est qu'un *groupe canonique* de P_{φ} : désignons-le par $\varkappa_{\varphi}$. On obtient par suite l'équivalence

$$\{\varphi\} \equiv \{u\} + 2\varkappa\varphi + \varphi^2. \tag{5}$$

6. Les formules (3), (4) et (5), bien connues, permettent d'introduire la *série* (*virtuelle*) $\{u\}$ et le *système canonique* $\{u, c\}$ sur des surfaces régulières pour lesquelles l'analyse précédente n'est plus valable. Cette extension ne présente aucune difficulté, et se fait toujours par la considération de déterminants fonctionnels, *fonctions rationnelles* du point de la variété sur laquelle on opère (courbe ou surface).

II. — Cas d'une variété de dimension quelconque.

7. Il est facile maintenant de passer à une variété V_n de dimension n, supposée actuellement *privée de singularité*. Si l'on se donne $\lambda+1$ formes différentielles rationnelles, ou formes de Pfaff, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda$, on définit ainsi $\lambda+1$ faisceaux d'hypersurfaces (1) obtenus en égalant chaque ω_j à zéro.

Dans le cas général où les faisceaux sont en position générique les uns par rapport aux autres, ils déterminent sur V_n une *variété algébrique* à λ dimensions des *contacts* de ces faisceaux, c'est-à-dire lieu du point de V_n où il existe un $[n-\lambda]$ tangent commun (2) à une surface de chaque faisceau passant par ce point (alors qu'en général les hypersurfaces ont un $[n-\lambda-1]$ tangent commun seulement) ou encore : en un tel point le produit extérieur $[\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda] = 0$. Cette variété des contacts sera désignée par le symbole : $\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda\}$.

Analytiquement, elle est définie par l'annulation (3) de la matrice

$$\left\| \frac{\partial \omega_j}{\partial (dt_k)} \right\| \qquad (j = 0, 1, \ldots, \lambda;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

(annulation qui est bien une conséquence de $[\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda] = 0$) les t_k désignant comme toujours des variables uniformisantes (locales) de V_n.

8. Envisageons en premier lieu le cas particulier où V_n possède des *intégrales de Picard de première espèce*, c'est-à-dire où l'irrégularité superficielle q de V_n

(1) On désigne ainsi une variété à $n-1$ dimensions dans une variété à n dimensions (les mots de surface et de courbe étant réservés aux cas des variétés à 2 ou 1 dimensions).

(2) Je désignerai, lorsqu'il n'y aura point de confusion possible, un espace projectif à k dimensions par $[k]$.

(3) Pour abréger on dira qu'une matrice de type quelconque est nulle si elle n'est pas de rang maximum.

est positive. Si l'on choisit λ tel que $\lambda+1\leq q$ on peut prendre, pour les ω_j du numéro précédent, $\lambda+1$ formes différentielles de première espèce $u_0, u_1, \ldots, u_\lambda$. L'hypothèse que les faisceaux ω_j sont génériques se traduit par le fait que ces formes différentielles de première espèce sont *fonctionnellement indépendantes* : c'est ce que nous supposerons.

Dans ce cas nous dirons que la variété

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$$

définie au moyen de $\lambda+1$ formes de première espèce est une *variété canonique de dimension* λ de V_n, et nous la représenterons par la notation $K_\lambda(V_n)$, où le symbole K_λ joue ainsi le rôle d'un opérateur à gauche de V_n ou plus simplement, lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible, par K_λ^n.

Pour que cette définition soit intéressante, il faut montrer que, comme pour les courbes et les surfaces, les variétés canoniques d'une même dimension λ *forment un seul système d'équivalence.*

Nous envisagerons d'abord le cas de deux variétés $W=\{u_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$ et $\overline{W}=\{\overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$ ne différant que par une seule des formes. La démonstration est aisée, tout au moins dans le cas où $\lambda+2\leq q$: prenons en effet une $(\lambda+2)^{\text{ième}}$ forme différentielle $\overline{u}_0$ et considérons la variété canonique à $\lambda+1$ dimensions

$$T=\{u_0, \overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}.$$

Sur cette T, les variétés

$$W_\rho=\{u_0+\rho\overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda\},$$

où ρ est un paramètre, forment un faisceau comprenant pour $\rho=0$ ou $\rho=\infty$, respectivement les variétés W et $\overline{W}$. Ces deux variétés sont tracées sur T par les hypersurfaces J_ρ du *faisceau linéaire*

$$J_\rho=\{u_0+\rho\overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda, \omega_1, \ldots, \omega_p\},$$

où les ω_j sont $p=n-\lambda-1$ formes différentielles arbitraires. L'intersection de la variété T par une hypersurface J_ρ comprend, outre la variété W_ρ, un résidu ε se caractérisant ainsi : en chaque point M de ε les $\lambda+1$ formes différentielles $v=u_0+\rho\overline{u}_0$, u_i ont un $[n-\lambda-1]$ tangent commun, tangent aussi à $\overline{u}_0$ puisque d'une part M est sur T et que d'autre part

$$[u_0, \overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda]=[v, \overline{u}_0, \ldots, u_\lambda];$$

enfin M appartenant à J_ρ les n formes v, u_i, ω ont un élément linéaire intégral commun, élément linéaire appartenant nécessairement au $[n-\lambda-1]$ tangent précédent [si l'on suppose le choix des ω_j tel que la variété $\{\omega_1\omega_2\ldots\omega_\rho\}$ n'ait pas de points communs avec T(1)] : par suite aux points de ε il existe un élément linéaire tangent commun aux $(n+1)$ formes ω_j, u_0, $\overline{u}_0$, u_i. Cette variété ε est donc variété-base du faisceau découpé sur T par les *jacobiennes* J_ρ. La partie

(1) Ce choix est possible, car la variété $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$ est à $p-1$ dimensions, et la variété T est à $\lambda+1$ dimensions : or $(p-1)+(\lambda+1)=n-1<n$.

variable, c'est-à-dire la variété W_ρ appartient donc à un système d'équivalence. (En se reportant au renvoi du n° 11 on reconnaît que ε est l'intersection de T avec la variété des contacts *extérieurs* des $n+1$ formes considérées.)

On passe ensuite facilement au cas général, car deux K_λ^n peuvent toujours se réunir par une chaîne de variétés de contacts ayant deux à deux λ faisceaux en commun.

Le système d'équivalence auquel appartiennent les variétés canoniques de dimension λ se nommera le *système canonique de dimension* λ de V_n et se dénotera par $|K_\lambda^n|$.

9. Avant de donner une extension des systèmes canoniques aux variétés n'entrant pas dans la catégorie envisagée précédemment, par exemple variétés d'irrégularité superficielle nulle, ou même variétés possédant un système ∞^{n-k} d'indice 1, de variétés à k dimensions, cas où $n-k+1$ formes différentielles de première espèce sont toujours fonctionnellement dépendantes (1), nous traiterons différents *problèmes de contact*, que les K_λ^n permettent de résoudre, problèmes dont les énoncés sont analogues à ceux rencontrés aux n^{os} 3, 4, et 5.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES DE CONTACT.

I. — Problèmes de contact entre intégrales de première espèce et fractions rationnelles.

10. Faisons tout d'abord quelques remarques d'ordre géométrique sur la variété des contacts de $\lambda+1$ faisceaux, dans le cas où l'un de ceux-ci possède une *variété base*, ainsi que cela se produit pour des faisceaux linéaires par exemple.

Envisageons donc $\lambda+1$ faisceaux $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ et supposons que le faisceau ω_0 ait une variété base (à $n-2$ dimensions) que nous désignerons par W. A part cela, les $\lambda+1$ faisceaux sont toujours placés en position générique.

Appelons T la variété $T=\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda\}$ et τ la variété $\tau=\{\omega_1, \ldots, \omega_\lambda\}_W$, c'est-à-dire la *variété des contacts des* λ faisceaux $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ sur W. τ *qui est à* $\lambda-1$ *dimensions appartient à* T.

En effet, soit M un point de τ : les λ faisceaux ω_i ont en commun un $[(n-2)-(\lambda-1)]=[n-\lambda-1]$ tangent situé dans le $[n-2]$ tangent à W en M, par définition de τ. D'autre part, les hyperplans tangents en M à ces λ faisceaux se coupent suivant un $[n-\lambda]$ contenant le $[n-\lambda-1]$ précédent. Cet $[n-\lambda]$ et le $[n-2]$ tangent à W ont donc comme réunion

(1) *Cf.* Severi, *Ann. di Matematica*, 20, 1913, p. 201.

un $[n-\lambda+n-2-(n-\lambda-1)]=[n-1]$. Il existe par suite une hypersurface de faisceau u_0 admettant cet $[n-1]$ comme hyperplan tangent à M, ce qui montre que M appartient à T.

Il en résulte que la section T par une hypersurface arbitraire du faisceau ω_0, hypersurface que nous désignerons par la même lettre, comporte tout d'abord la variété τ. On peut se proposer la recherche de la partie résiduelle. On voit facilement que celle-ci n'est autre que la variété $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}_{\omega_0}$, c'est-à-dire la variété de contacts des faisceaux ω_i sur l'hypersurface ω_0. Par suite on a l'égalité (1)

$$(6) \qquad (T, \omega_0) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}_W + \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}_{\omega_0}.$$

11. Considérons maintenant $\lambda+1$ faisceaux sur V_n, comprenant ρ formes différentielles de première espèce et $\lambda+1-\rho$ différentielles rationnelles.

Désignons par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}$ les différentielles rationnelles et par $u_1, \ldots, u_\rho$ les formes différentielles de première espèce. Proposons-nous la recherche de la variété

$$T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_1, \ldots, u_\rho\}.$$

Introduisons pour cela, employant encore la méthode du n° 3, une $(\rho+1)^{\text{ième}}$ forme de première espèce u_0 et considérons, *sur la variété*

$$\Theta = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_0, u_1, \ldots, u_\rho\},$$

le déterminant fonctionnel δ déjà employé plusieurs fois

$$\delta = \frac{D(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, u_1, \ldots, u_\rho)}{D(u_0, \varphi_1, \ldots, u_1, \ldots, u_\rho)} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}.$$

Exprimons l'équivalence sur Θ des variétés pôles et zéros de la fraction rationnelle δ. Les zéros du numérateur ne sont autres que les points de la variété

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_0, \ldots, u_\rho\}_\Theta.$$

Il est manifeste que cette variété comprend : 1° la variété T inconnue; 2° une variété ε que l'on peut caractériser ainsi : en un point M de ε les $\lambda+1$ hypersurfaces $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, u_\rho$ ont un $[n-\lambda-1]$ tangent commun coupant le $[\lambda+1]$ tangent à Θ en M suivant *une droite* d'après la définition de la variété de contacts de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, u_\rho$ sur Θ. Mais cet $[n-\lambda-1]$ est aussi tangent à la surface u_0 qui y passe puisque M appartient à Θ donc les points de ε sont tels que le $[n-\lambda-1]$ tangent aux $\varphi_0, \ldots, u_\rho$ coupe le $[\lambda+1]$ tangent à Θ suivant une droite, ou encore ε est le lieu des points de Θ où les $[\lambda+2]$ faisceaux u_i, φ_j ont une droite tangente commune [on peut dire qu'en un point de ε le système de Pfaff $u_i=0, \varphi_j=0$ admet un élément intégral linéaire. ε se nommera *variété des contacts extérieurs* des $\lambda+2$ faisceaux sur Θ pour rappeler qu'en un point

(1) Conformément aux notations usuelles en géométrie algébrique, je désignerai par (A, B) l'intersection des deux variétés A et B.

de ε le *produit extérieur régressif* (¹) (au sens de Grassmann) des $\lambda + 2$ formes différentielles données est nul].

Il suit de là que ε a une *définition symétrique* par rapport aux faisceaux et que par suite on n'a pas à en tenir compte puisqu'il figure aussi dans les zéros du dénominateur de δ.

D'autre part, la section de Θ par une surface polaire d'un faisceau φ_j où $j \neq 0$ figure comme lieu de pôles aussi bien au numérateur qu'au dénominateur de δ : ces sections n'apportent donc aucune contribution dans l'équivalence cherchée. Il reste à évaluer les pôles de δ provenant de la section de Θ par la surface polaire φ_0. D'après la formule (6), cette section comprend les variétés

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_0, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0} \quad \text{et} \quad \{\varphi_1, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0^2},$$

en désignant par φ_0^2 la variété base du faisceau φ_0 (*variété caractéristique* de φ_0).

Mais il est facile de voir que la première de ces variétés est un lieu de *pôles doubles de* δ (en supposant φ_0 hypersurface polaire simple), alors que la seconde (qui est en quelque sorte la section de Θ avec la *variété d'indétermination* de φ_0) est un lieu de *pôles simples* seulement.

On obtient ainsi l'équivalence fondamentale analogue à (5) :

$$(7)\quad \{\varphi_0, \ldots; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv \{\varphi_1, \ldots; u_0, u_1, \ldots, u_\rho\} + 2\{\varphi_1, \ldots; u_0, u_1, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0} + \{\varphi_1, \ldots; u_0, u_1, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0^2}.$$

Ce qui montre que le problème se ramène à un problème analogue avec une différentielle rationnelle de moins : on parvient ainsi à des variétés de contacts où ne figurent plus que des formes de première espèce; or, pour cette dernière catégorie, la réponse est donnée immédiatement par la définition des *variétés canoniques*. Explicitons donc les calculs.

12. Prenons d'abord le cas d'une seule différentielle rationnelle φ_0; alors la formule (7) nous donne

$$\{\varphi_0; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv \{u_0, \ldots, u_\rho\} + 2\{u_0, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0} + \{u_0, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0^2},$$

ce qui s'écrit par définition des variétés canoniques

$$\{\varphi_0; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\rho^n + 2K_\rho^{\varphi_0} + K_\rho^{\varphi_0^2}$$

ou encore *symboliquement*

$$(8)\qquad \{\varphi_0; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\rho(1 + \varphi_0)^2.$$

L'interprétation du second membre est aisée : on fait jouer à la variété V_n, dans laquelle on prend les variétés de contacts, le rôle d'*unité*

$$[K_\rho(1) = K_\rho^n].$$

(¹) Cf. *Enzykl. d. Math. Wiss.*, III, AB 11, p. 1442; É. CARTAN, *Invariants intégraux*, p. 58.

La forme (8) suggère la formule suivante

$$(9)\qquad \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho};\ u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\lambda[(1+\varphi_0)^2(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2],$$

dans laquelle chaque produit des φ_j dans le développement du polynome du second membre désigne l'intersection des φ_j correspondants.

La formule (9) se démontre facilement au moyen de la formule (7) par le procédé d'induction complète.

En effet (9) étant admise pour $(\lambda - \rho)$ faisceaux linéaires, le second membre de (7) s'écrit

$$K_\lambda(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2 + 2K_\lambda\varphi_0(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2 + K_\lambda\varphi_0^2(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2.$$

Ce qui n'est autre que l'expression développée de

$$K_\lambda(1+\varphi_0)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2.$$

13. Il est loisible dans la formule (9) de faire $\rho = 0$ de sorte que l'on obtient la formule suivante exprimant la *variété de contact* $\lambda + 1$ *faisceaux linéaires* en position générique :

$$(10)\qquad \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\} \equiv K_\lambda \prod_0^\lambda (1+\varphi_i)^2.$$

Or cette formule nous donne la possibilité d'introduire les *systèmes canoniques* sans *utiliser* les formes différentielles de première espèce de sorte que ces systèmes peuvent se considérer sur des *variétés quelconques*. Bien entendu les variétés introduites pourront être *virtuelles*.

En supposant les variétés canoniques déjà définies dans les variétés de dimension $\leq n-1$ pour lesquelles la formule (10) sera valable, on peut montrer que la variété virtuelle $K_\lambda(1)$ *définie* par la formule (10) reste *équivalente à elle-même lorsqu'on varie les faisceaux*.

A cet effet, on peut observer, en imitant le raisonnement employé au n° 8, que la variété des contacts $W = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}$ peut encore être définie comme intersection complète des variétés du type $J = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu\}$, où les $p = n - \lambda - 1$ formes ω_i sont choisies arbitrairement (de manière toutefois à constituer avec les φ_j une base pour les différentielles de la variété). Introduisons une $(\lambda+2)^{\text{ième}}$ forme différentielle $\overline{\varphi}_0$, désignons par $\overline{W}$ et $\overline{J}$ les lieux analogues à W et J où $\overline{\varphi}_0$ remplace φ_0, et soit T la variété $\{\varphi_0, \overline{\varphi}_0, \ldots, \varphi_\lambda\}$. Recherchons la nature de l'intersection (JT). Celle-ci comprend en premier lieu W, puis les sections de T par chaque variété-base des $\lambda+2$ faisceaux φ_i (d'après le n° 10 cette section d'ailleurs est la variété des contacts des $\lambda+1$ autres faisceaux sur cette base). Enfin en dehors de ces points existe un résidu ε qui, on le reconnaît comme au n° 11, n'est autre que l'intersection de T avec la variété des contacts extérieurs des $n+1$ faisceaux considérés ω_i et φ_j. Par suite l'intersection (JT) ne diffère de la précédente que par $\overline{W}$ et la

section de T par la base du faisceau $\overline{\varphi}_0$. On peut donc écrire en désignant par β les sections de T par les bases des faisceaux $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda$ et par $F(\overline{F})$ une hypersurface de $\varphi_0(\overline{\varphi}_0)$:

$$(JT) \equiv \{\overline{\varphi}_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_F + \beta + \varepsilon + W,$$

de même

$$(\overline{J}T) \equiv \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}} + \beta + \varepsilon + \overline{W}.$$

Ici, à l'inverse de ce qui a lieu au n° 8, les variétés J et $\overline{J}$ ne sont plus équivalentes dans le cas général, par suite de la présence des variétés bases, mais la théorie classique des hypersurfaces adjointes (¹) apprend que les deux combinaisons $J + 2\overline{F}$ et $\overline{J} + 2F$ sont équivalentes. On a par suite, en coupant par T,

$$(JT) + 2(\overline{F}T) \equiv (\overline{J}T) + 2(FT).$$

Or, d'après la formule (6),

$$(FT) \equiv \{\overline{\varphi}_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_F + \{\overline{\varphi}_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{F'}$$

et une équivalence analogue pour $(\overline{F}T)$. Par suite, en omettant des termes communs aux deux membres, on peut dire l'expression

$$W + \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda\}_{F'} + 2\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}} + 2\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{F'}$$

ne change pas si l'on permute φ_0 et $\overline{\varphi}_0$ ou encore que l'expression

$$E \equiv W + 2\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}} + \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}'}$$

jouit de la même propriété.

Si maintenant on admet la formule (10) pour les variétés jusqu'à la dimension $(n-1)$, on voit que E peut s'écrire

$$E \equiv W + K_\lambda(\overline{\varphi}_0^2 + 2\overline{\varphi}_0)(1+\varphi_0)^2 \ldots (1+\varphi_\lambda)^2$$

retranchant de E la variété symétrique (comprenant des variétés canoniques déjà définies) :

$$K_\lambda[(1+\varphi_0)^2(1+\overline{\varphi}_0)^2(1+\varphi_1)^2 \ldots (1+\varphi_\lambda)^2 - 1],$$

on obtient la variété

$$K_\lambda(1) \equiv W - K_\lambda[(1+\varphi_0)^2(1+\varphi_1)^2 \ldots (1+\varphi_\lambda)^2 - 1]$$

qui, par hypothèse, est invariante si l'on permute φ_0 et $\overline{\varphi}_0$; comme de plus elle est *symétrique* et indépendante de $\overline{\varphi}_0$ on reconnaît que $K_\lambda(1)$ est indépendante des faisceaux φ_i.

On appellera alors *système canonique de dimension* λ le système d'équivalence de ces variétés $K_\lambda(1)$ de sorte que la formule (10) restera valable dans une variété à n dimensions.

(¹) Cf. par exemple *Enzykl. d. Math., Wiss.*, III, (6 *b*), p. 763, ou Severi, *Rendic. d. Cir. Math. Palermo*, 28, 1909, p. 33.

II. — Problème de contact entre formes différentielles de première espèce et systèmes linéaires.

14. Un système linéaire de dimension λ d'hypersurfaces dans V_n représente l'ensemble des hypersurfaces de niveau constant pour une fraction rationnelle contenant linéairement $\lambda - 1$ constantes arbitraires et dont la variété des pôles est fixe. Dans ce qui suit un faisceau transcendant (tel que celui déterminé par une forme différentielle de première espèce) sera considéré comme un système linéaire de dimension 1, à cela près que pourra manquer la variété base du faisceau.

Envisageons k systèmes linéaires de dimensions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Par un point générique de V_n passe λ_i hypersurfaces indépendantes du système de dimension λ_i, hypersurfaces ayant en ce point leurs hyperplans tangents linéairement indépendants. On a ainsi $\sum_1^k \lambda_i$ hyperplans en chaque point de V_n déterminant un $[n - \Sigma\lambda_i]$ tangent commun à toutes les hypersurfaces appartenant aux systèmes linéaires. Nous appellerons *variété de contact* des systèmes linéaires donnés, le lieu des points de V_n, où les hypersurfaces qui y passent ont en commun un *espace linéaire d'une dimension supérieure d'une unité à la dimension normale*, c'est-à-dire le lieu des points où il existe un $[n - \Sigma\lambda_i + 1]$ tangent commun à toutes les hypersurfaces des systèmes linéaires.

Pour exprimer qu'un point M appartient à la variété de contact précédente, il suffit d'exprimer que le dernier hyperplan tangent contient le $[n - \Sigma\lambda_i + 1]$ déterminé par les $\Sigma\lambda_i - 1$ autres, ce qui donne $n - \Sigma\lambda_i + 1$ conditions si l'on tient compte du fait que l'hyperplan considéré passe déjà par M; il suit de là que cette variété de contacts est à $\lambda = \Sigma\lambda_i - 1$ dimensions. De même que dans le cas des faisceaux envisagés au paragraphe I de ce Chapitre, nous noterons la variété de contacts de k systèmes linéaires dont $F_1, F_2, \ldots, F_k$ représentent respectivement une hypersurface générique, par l'écriture $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$.

15. On peut démontrer relativement à ces variétés de contacts, des propositions analogues à celles formant l'objet du n° 10 : la démonstration est en tous points analogue : si l'on désigne par W la variété base (lorsqu'elle existe) du système linéaire de dimension λ_1 (W est à $n - \lambda_1 - 1$ dim.) et par τ la variété $\tau = \{F_2, \ldots, F_k\}_W$, c'est-à-dire la variété de contacts de systèmes $F_2, F_3, \ldots, F_k$ sur W, alors τ appartient à $T = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$.

Le reste de l'intersection de T et d'une hypersurface arbitraire F_1 du système F_1 est formé par la *variété de contacts sur* $\overline{F}_1$ des autres systèmes linéaires considérés et du système (à $\lambda_1 - 1$ dimensions) *caractéristique* de F_1 sur $\overline{F}_1$ soit f_1. En effet soit M un point commun à T et à $\overline{F}_1$ n'appartenant pas à W, alors par M passent seulement λ_1 hypersurfaces indépendantes du système F_1, dont $\overline{F}_1$ est l'une d'elles. Les $\lambda_1 - 1$ autres sont précisément celles

du système caractéristique f_1. Le $[n - \Sigma\lambda_i + 1]$ tangent commun en M à tous les systèmes F_i appartient à l'hyperplan tangent en M à $\overline{F}_1$, et se trouve bien tangent commun aux sections des systèmes $f_1, F_2, \ldots, F_k$ par $\overline{F}_1$.

16. Partant de ces propriétés on peut procéder comme au n° 2 pour exprimer les variétés de contact au moyen de systèmes canoniques, par la considération de déterminants fonctionnels et l'évaluation des ordres de multiplicité des variétés polaires des systèmes pour ces déterminants.

Mais on peut aussi suivre une méthode plus directe et de structure davantage géométrique, la méthode de *dégénérescence*. Elle repose sur la proposition suivante : prenons, dans un système linéaire L de dimension $\lambda + 2$, un système linéaire de dimension p, Φ, et un système à q dimensions, Σ, *non sécant* avec Φ, c'est-à-dire Φ et Σ n'ont aucune hypersurface commune et tels de plus que $p + q = \lambda + 1$. L est alors la somme linéaire des systèmes Φ et Σ. Si l'on envisage la variété de contact de Φ, Σ et d'un certain nombre d'autres systèmes linéaires $R_1, R_2, \ldots$, dont l'ensemble sera désigné par R et la somme des dimensions par ρ (cet ensemble peut manquer), cette variété de contact, soit τ, est tracée sur la variété T de contact du système L et des systèmes restants R. Si maintenant Σ et Φ varient continûment jusqu'à acquérir une hypersurface S en commun et par suite à déterminer un système somme linéaire L^* à $\lambda + 1$ dim., τ varie aussi avec continuité, et se scinde à la limite dans les variétés suivantes : τ^* de contact entre L^* et les systèmes résiduels, et $\varkappa$ de contact entre ces systèmes et le *système caractéristique* du système L sur S, soit $(L)_S$. Soient en effet $\overline{\Phi}$, $\overline{\Sigma}$, $\overline{\tau}$, les limites de Φ, Σ, τ. Pour qu'un point M appartienne à τ, il faut et il suffit que passent en M : 1° ρ hypersurfaces (sous-entendu : indépendantes) de R; 2° p hypersurfaces de $\overline{\Phi}$; 3° q hypersurfaces de $\overline{\Sigma}$; et que ces $\lambda + \rho + 1$ hypersurfaces admettent un $[n - (\lambda + \rho + 1) + 1] = [n - \lambda - \rho]$ tangent commun Θ. Si les $p + q = \lambda + 1$ hypersurfaces des catégories 2° et 3° sont indépendantes, ce sont les $\lambda + 1$ hypersurfaces de L^* qui passent en M et celui-ci est alors un point de τ^*. Dans le cas contraire, c'est que M appartient à S et il reste en dehors de S, λ hypersurfaces indépendantes qui appartiennent à L. Si maintenant on observe que le $[n - 1]$ tangent en M à S contient l'espace tangent commun Θ, *en faisant de la géométrie sur* S, on voit qu'en M les hypersurfaces suivantes : 1° ρ hypersurfaces R; 2° λ hypersurfaces de $(L)_S$ admettent un espace linéaire tangent commun d'une dimension supérieure d'une unité à la normale, c'est-à-dire que M appartient à $\varkappa$. Les réciproques sont immédiates.

On a par suite l'égalité

$$\bar{\tau} = \tau^* + \varkappa,$$

d'où l'équivalence

$$\tau \equiv \tau^* + \varkappa$$

ou, sous une forme plus explicite,

$$\{\Phi, \Sigma, R\} \equiv \{L^*, R\} + \{(L)_S, R\}.$$

On se trouve ainsi ramené à des problèmes où un des systèmes linéaires a une dimension de moins, ou à des problèmes analogues dans un espace à dimension d'une unité moindre.

17. On arrive ainsi par réductions successives à des problèmes de contact entre faisceaux linéaires que l'on a appris à résoudre au paragraphe précédent.

La formule exprimant le résultat final, analogue à la formule (9) est la suivante

$$\{F_1, F_2, \ldots, F_k, u_1, u_2, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\lambda \prod_1^k (1+F_i)^{\lambda_i+1}, \tag{11}$$

où

$$\lambda = \Sigma \lambda_i + \rho - 1,$$

et où ont été mises en évidence les formes différentielles de première espèce pouvant figurer parmi les systèmes linéaires et qui n'apportent aucune contribution au second membre. Pour l'interprétation de celui-ci, se rapporter au n° 12. Admettons en effet (11) démontrée pour des variétés à moins de n dimensions, et pour des variétés à n dimensions lorsque la dimension du système F_1 est λ_1. Établissons-la pour le cas d'un système de dimension $\lambda_1 + 1$. Pour simplifier je désignerai par F le système F_1, par λ sa dimension, et par R les systèmes résiduels $F_2, \ldots, F_k, u_1, \ldots, u_\rho$. Imaginons que F appartienne à un système linéaire L à $\lambda + 2$ dimensions et prenons dans L un faisceau Φ non sécant avec F. Par les résultats du numéro précédent, où Σ est remplacé par F, on a

$$\{F, \Phi, R\} \equiv \{L^*, R\} + \{(L)_S, R\}.$$

Par hypothèse (11) s'applique au premier membre et au deuxième terme du second membre, on a ainsi en particulier

$$\{F, \Phi, R\} \equiv K_\lambda[(1+F)^{\lambda+1}(1+F)^2 P] = K_\lambda[(1+F)^{\lambda+3} P].$$

où

$$P = (1+F_2)^{\lambda_2+1}(1+F_k)^{\lambda_k+1};$$

et de même

$$\{(L)_S, R\} \equiv K_\lambda[F(1+F)^{\lambda+2} P]$$

d'où, par différence,

$$\{L^*, R\} \equiv K_\lambda[(1+F)^{\lambda+3} P - F(1+F)^{\lambda+2} P] \equiv K_\lambda[(1+F)^{\lambda+2} P],$$

ce qui n'est autre que la formule (11) pour un premier système L^* à $\lambda + 1$ dimensions. Partant alors de (10) on parvient à justifier (11) dans tous les cas. Naturellement les formes de première espèce peuvent manquer, et l'on obtient alors une formule analogue à la formule (10) que j'omets d'écrire pour simplifier.

III. — Problème des jacobiennes.

18. *Le problème des variétés jacobiennes* ou des *jacobiennes* est en quelque sorte une dégénérescence des problèmes de contact entre systèmes linéaires traités dans le paragraphe II : on peut dire que c'est un *problème de contact inté-*

rieur au système considéré. On sait en quoi ce problème consiste : étant donné un système linéaire L de dimension $\lambda + 1$, il existe en général ∞^{λ} hypersurfaces de L (formant un système algébrique) ayant une *singularité nouvelle* que ne possède pas l'hypersurface générique du système L. Le lieu de ces singularités est en général à λ dimensions et se nomme variété jacobienne du système considéré.

Dans ce qui suit nous supposerons que le système donné est non-extraordinaire, c'est-à-dire qu'il possède une variété base de dimension normale $(n - \lambda - 2)$, qu'il n'a aucun point multiple assigné et que les singularités nouvelles acquises par les hypersurfaces du système L sont en général des points doubles. La jacobienne d'un tel système est alors le lieu des points de V_n, où une des hypersurfaces de L qui y passe possède un point double.

Il suit de là que, parmi les $\lambda + 1$ hypersurfaces indépendantes qui passent par ce point, λ seulement ont un véritable hyperplan tangent, de sorte que toutes les hypersurfaces passant en ce point sont tangentes à un $[n - \lambda]$ (alors qu'en général il n'existe qu'un $[n - \lambda - 1]$ tangent commun seulement) : on voit bien apparaître ainsi le caractère de variété de *contact intérieur* de la jacobienne.

19. La méthode de dégénérescence utilisée au n° 16 pour les problèmes de contact entre systèmes linéaires s'applique ici à peu près textuellement : choisissons dans le système L à $\lambda + 1$ dimensions envisagé, un faisceau φ et un système Σ à $(\lambda - 1) + 1 - 1 = \lambda - 1$ dimensions non sécant avec φ. La variété de contact de φ et de Σ (à $\lambda - 1$ dimensions d'après le n° 14) est tracée sur la jacobienne du système considéré, et tend à la limite, lorsque φ et Σ se meuvent de manière à acquérir une hypersurface en commun, S, déterminant ainsi un système L^* à λ dimensions, vers les variétés suivantes : variété jacobienne τ^* de L^* et variété jacobienne du *système caractéristique*, du système L considéré sur S.

De même qu'au n° 16 on ramène le problème à un problème analogue où la dimension, soit du sytème linéaire, soit de la variété support, est réduite d'une unité.

20. On parvient ainsi à la formule suivante, exprimant la jacobienne J_{λ} d'un système linéaire à $\lambda + 1$ dimensions, dont F désigne une hypersurface générique :

$$J_{\lambda} \equiv K_{\lambda}(1 + F)^{\lambda+2}, \tag{12}$$

où des conventions analogues à celles posées dans la formule (9) sont utilisées.

Un cas particulier intéressant de cette formule s'obtient en posant $\lambda = 0$, et en supposant que le faisceau ainsi obtenu est celui d'une forme différentielle de première espèce u. J_0 se réduit dans ce cas à K_0^n, groupe canonique de la variété qui se trouve ainsi être le groupe (virtuel) jacobien $\{u\}$ d'une forme de première espèce.

CHAPITRE III.

THÉORÈMES D'ADJONCTION.

21. Les résultats obtenus dans le Chapitre précédent font intervenir les variétés canoniques d'une même dimension prises dans des variétés du type *intersections complètes ou variétés caractéristiques* ainsi que l'exprime le symbole K_λ place devant les seconds membres des formules (9), (11) et (12).

Il peut être désirable de n'introduire que les variétés canoniques K_λ^n de *la variété* V_n *dans laquelle on opère*.

Dans ce but on est amené à trouver les variétés canoniques de la variété intersection complète de deux variétés (équivalentes ou non, le premier cas correspondant aux variétés caractéristiques) en fonction d'éléments dépendant de ces variétés et des systèmes canoniques de V_n.

Le cas où l'une de ces variétés est une hypersurface de V_n et l'autre la variété *unité* (c'est-à-dire V_n elle-même) est particulièrement intéressant, et conduit à des théorèmes auxquels on peut donner le nom de *théorèmes d'adjonction*, car ils font intervenir des variétés covariantes, généralisant les classiques variétés adjointes d'une hypersurface.

22. Le premier de ces théorèmes est celui exprimé par la formule suivante :

$$K_\lambda^F \equiv (F, K_{\lambda+1}^F + K_{\lambda+1}^n), \tag{13}$$

où F désigne l'hypersurface d'un système linéaire $|F|$. En particulier, pour $\lambda = n-2$, on obtient

$$K_{n-2}^F \equiv (F, F + K_{n-1}^n),$$

car $K_{n-1}^F = F$, ce qui n'est autre que la classique formule d'adjonction rappelée à la fin du numéro précédent.

Pour démontrer (13) on peut procéder par récurrence en se servant de la formule (12) : remarquons tout d'abord que la formule (13) conduit par application répétée à la formule suivante

$$K_\lambda^{F\rho} \equiv (F, K_{\lambda+1}^{F\rho} + K_{\lambda+1}^{F\rho-1}), \tag{14}$$

où $F\rho$ désigne la $\rho^{ème}$ variété caractéristique de $|F|$, intersection de ρ variétés équivalentes à F (pour $\rho = 0$ on pose $F^0 = 1$, c'est-à-dire V_n). Cela étant, considérons un système linéaire $|F|$ de dimension $\lambda + 2$ et soit $J_{\lambda+1}$ la jacobienne de ce système donnée par l'application de (12)

$$J_{\lambda+1} \equiv K_{\lambda+1}(1+F)^{\lambda+2}.$$

Il est facile de voir que la variété $(F, J_{\lambda+1})$, intersection d'une hypersurface de $|F|$ et de J_λ n'est autre que la jacobienne du système caractéristique de $|F$

sur F et se trouve par suite donnée par

$$(F, J_{\lambda+1}) \equiv (J_\lambda^{[F]})_F \equiv K_\lambda F(1+F)^{\lambda+2},$$

car il faut dans le second membre de (12), prendre F comme *variété unité*, c'est-à-dire *multiplier* ce second nombre par F *avant* le symbole K_λ.

On déduit des deux relations précédentes

$$(F, K_{\lambda+1}(1+F)^{\lambda+2}) \equiv K_\lambda F(1+F)^{\lambda+2}$$

ou encore

$$[F, K_{\lambda+1}(1+F)(1+F)^{\lambda+2}] \equiv K_\lambda F(1+F)^{\lambda+2}.$$

Si maintenant on admet la relation (14) pour $\rho \geqq 2$, on voit qu'à chaque terme de la forme (1) $K_\lambda \binom{\lambda+2}{\alpha} F^{\alpha+1}$ dans le second membre, correspond un terme de la forme $\left[F, K_{\lambda+1}\binom{\lambda+2}{\alpha}(F^\alpha + F^{\alpha+1})\right]$ dans le premier membre qui lui est équivalent si $\alpha > 0$. Pour $\alpha = 0$, on a la relation (13) elle-même qui se trouve ainsi démontrée.

23. La formule (13) indique que l'on obtient le système canonique de dimension λ de f en coupant cette hypersurface par une variété à $\lambda+1$ dimensions somme d'une variété canonique à $\lambda+1$ dimensions de F et d'une variété analogue de V_n. Si donc nous appelons *variété adjointe* d'indice λ cette dernière somme de variétés canoniques, (13) peut s'écrire

$$K_\lambda^F \equiv (F, A_\lambda^F) \qquad \text{avec} \quad A_\lambda^F \equiv K_{\lambda+1}^F + K_{\lambda+1}^n,$$

mais dans l'expression de A_λ^F, $K_{\lambda+1}^F$ peut s'écrire à son tour

$$K_{\lambda+1}^F \equiv (F, A_{\lambda+1}^F) \qquad \text{avec} \quad A_{\lambda+1}^F \equiv K_{\lambda+2}^F + K_{\lambda+2}^n$$

et ainsi de suite.

Le dernier terme auquel on arrive correspond à $\lambda + k = n$ et l'on a

$$A_{\lambda+k-1}^F \equiv K_n^n \equiv 1.$$

Par suite l'adjointe d'indice λ de F peut s'écrire

$$A_\lambda^F \equiv K_{\lambda+1}^n + (F, K_{\lambda+2}^n) + \ldots + F^{(n-\lambda-1)}$$

ou encore, comme la *somme* de la *série*

$$A_\lambda^F \equiv K_{\lambda+1}^n + (F, K_{\lambda+2}^n) + (F^2, K_{\lambda+3}^n) + \ldots,$$

en considérant un terme tel que K_ρ^n comme *nul* si $\rho > n$ de sorte que l'on a

(1) Conformément à un usage répandu je désigne par $\binom{n}{p}$ le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^n$, c'est-à-dire pour n et p entiers le coefficient $\frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$.

symboliquement (avec le sens qui vient d'être précisé) (¹)

$$A_\lambda^F \equiv \frac{K_{\lambda+1}^n}{1-FK}. \tag{15}$$

La formule (14) est susceptible d'une forme toute semblable et s'écrit

$$K_\lambda^{F^\rho} \equiv (F^\rho, A_\lambda^{F^\rho}) \quad \text{avec} \quad A_\lambda^{F^\rho} \equiv \frac{K_{\lambda+1}^n}{(1-FK)^\rho}. \tag{16}$$

L'application de (16) se fait selon les mêmes principes que pour (15) : on *développe en série* par rapport à FK le second membre [terme général $\binom{-\rho}{\alpha}(-1)^\alpha F^\alpha K^\alpha = \binom{\rho+\alpha-1}{\alpha} F^\alpha K^\alpha$], en ne conservant que les termes ayant un sens.

24. Le problème posé au n° 21 est ainsi résolu par (15) et (16) pour des hypersurfaces de V_n et leurs variétés caractéristiques des différentes dimensions. Il reste maintenant à traiter le cas des *variétés intersections complètes* et tout d'abord le cas de l'intersection de deux hypersurfaces, F_1 et F_2.

Soit $W = (F_1, F_2)$; si *nous faisons de la géométrie dans* F_1, W se trouve être une hypersurface de cette variété et la formule (15) est applicable et donne

$$K_\lambda^W = (WA_\lambda^W) \quad \text{avec} \quad A_\lambda^W \equiv \frac{K_{\lambda-1}^{F_1}}{1-WK},$$

ou développée

$$A_\lambda^W \equiv \sum_0^\infty (W^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})_{F_1}$$

(l'∞ comme indice supérieur de sommation indique simplement que l'on prend tous les termes ayant un sens, les suivants étant remplacés par zéro, et le F_1 placé en indice indique que l'on doit prendre les intersections dans F_1). Si *l'on veut faire de la géométrie dans* V_n, on voit que le terme

$$(W^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})_{F_1} = (F_1^\alpha F_2^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})$$

s'écrit

$$(F_2^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1}),$$

où cette fois les intersections sont *prises dans* V_n.

Si dans la formule ainsi obtenue :

$$A_\lambda^W \equiv \sum_0^\infty (F_2^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})$$

(¹) Il est à noter que, dans la formule (15) et les suivantes, les opérations symboliques indiquées au deuxième membre ont un sens différent de celui employé au n° 12 [dans la formule (8) par exemple]. Au n° 12 le symbole K) est un opérateur portant sur la variété *écrite à sa droite*, opérateur distributif par définition et permutable avec les coefficients numériques. Dans la formule (15) l'opérateur K et ses puissances ne portent *que sur la variété* V_n *dans laquelle on opère* : c'est la raison pour laquelle, dans le développement des formules analogues K est toujours écrit à *droite* des symboles représentant les autres variétés. (La variété unité, c'est-à-dire V_n étant supposée implicitement écrite à droite de K.)

on remplace chaque $K_\rho^{F_i}$ par son expression déduite au moyen de (15), on a

$$A_\lambda^W \equiv \sum_{0,0}^{\infty} (F_1^\beta F_2^\alpha K^n_{\lambda+\alpha+\beta}),$$

ce qui n'est autre que le développement de la *fraction rationnelle* en K

$$A_\lambda^W \equiv \frac{K^n_{\lambda+2}}{(1-F_1K)(1-F_2K)}.$$

On entrevoit maintenant la réponse au problème dans le cas général d'une variété W, *intersection complète* de k formes $F_1, F_2, \ldots, F_k$

$$W = (F_1, F_2, \ldots, F_k),$$

on a, pour les systèmes canoniques de W,

$$(88) \qquad K_\varepsilon^W \equiv (WA_\lambda^W) \quad \text{avec} \quad A_\lambda^W \equiv \frac{K^n_{\lambda+k}}{(1-F_1K)(1-F_2K)\ldots(1-F_kK)}.$$

En particulier, si l'on suppose toutes les hypersurfaces F_i équivalentes à une même hypersurface F, on retombe sur la formule (16).

La formule (18) nous permet le passage du symbolisme actuel à celui employé dans le Chapitre II [*cf.* note (¹), page 163].

Soient par exemple A et B deux hypersurfaces de V_n et $\varphi(A, B)$ une fraction rationnelle en A et B dont le développement en série est supposé à coefficients *entiers*

$$\varphi = \sum_{0,0}^{\infty} C_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta.$$

En vertu de (18), la variété canonique $K_\lambda[\varphi(A, B)]$, s'écrit

$$\sum C_{\alpha\beta} K_\lambda (A^\alpha B^\beta) = \sum C_{\alpha\beta} \frac{A^\alpha B^\beta K_{\lambda+\alpha+\beta}}{(1-AK)^\alpha (1-BK)^\beta} = \varphi\left(\frac{AK}{1-AK}, \frac{BK}{1-BK}\right).$$

Inversement, une variété U, se présentant sous la forme

$$U = \psi(AK, BK) K_\lambda,$$

peut encore s'exprimer, avec l'opérateur K_λ *à gauche*

$$U = K_\lambda \left[\psi\left(\frac{A}{1+A}, \frac{B}{1+B}\right)\right].$$

On peut ainsi transformer les formules du présent Chapitre en formules adaptées au symbolisme du Chapitre II.

Remarquons enfin que si l'on introduit la *fonction génératrice* de Laplace des différentes variétés canoniques, celle de V_n sera

$$\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty} K_\lambda^n t^\lambda = \frac{1}{1-Kt},$$

celle de W sera

$$\varphi_W(t) = W \frac{K_k}{(1-F_1K)\ldots(1-F_kK)} \frac{1}{1-Kt},$$

par suite en introduisant les fonctions génératrices attachées aux hypersurfaces F_i, soit

$$\varphi_i(t) = \frac{F_i K}{1 - K t},$$

on a la formule simple

$$\varphi_w(t) = \varphi_1(F_1)\,\varphi_2(F_2) \dots \varphi_k(F_k)\,\varphi(t).$$

25. Au moyen de la formule (18) on peut exprimer chacun des termes qui figurent dans les seconds membres des formules (10), (11) et (12) au moyen des variétés canoniques de V_n, ce qui répond au desideratum formulé au début de ce Chapitre. La formule (11)

$$\{F_1, F_2, \dots, F_k; u_1, \dots, u_\rho\} \equiv K_\lambda \prod_k^1 (1 + F_i)^{\lambda_i + 1}$$

devient ainsi

$$\{\dots\} \equiv K_\lambda \prod_1^k \sum \binom{\lambda_i + 1}{\alpha_i} F_i^{\alpha_i} \qquad \text{où } 0 \leqq \alpha_i \leqq \lambda_i + 1.$$

En supposant le deuxième membre développé, on a des termes de la forme

$$\binom{\lambda_1 + 1}{\alpha_1} \binom{\lambda_2 + 1}{\alpha_2} \dots \binom{\lambda_k + 1}{\alpha_k} F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \dots F_k^{\alpha_k}$$

dont il faut prendre une variété canonique de dimension λ. En vertu de la formule (18) cela revient à remplacer chaque F_i par le symbole $\frac{F_i K}{1 - F_i K}$ et à multiplier le tout à droite par K_λ. La somme de tous ces termes n'est autre évidemment que l'expression du second membre de (11) où l'on a remplacé dans les binomes $(1 + F_i)$, F_i par $\frac{F_i K}{1 - F_i K}$, c'est-à-dire

$$\prod_1^k \left(1 + \frac{F_i K}{1 - F_i K}\right)^{\lambda_i + 1} K_\lambda$$

ou encore

$$\frac{K_\lambda^n}{(1 - F_1 K)^{\lambda_1 + 1} (1 - F_2 K)^{\lambda_2 + 1} \dots (1 - F_k K)^{\lambda_k + 1}};$$

on a donc la formule suivante, transformée de (11),

$$\{F_1, F_2, \dots; u_1, u_2, \dots, u_\rho\} \equiv \frac{K_\lambda^n}{\prod_1^k (1 - F_i K)^{\lambda_i + 1}}. \tag{19}$$

D'une manière toute semblable on transforme la formule (12), donnant la jacobienne d'un système linéaire, sous la forme

$$J_\lambda \equiv \frac{K_\lambda^n}{(1 - FK)^{\lambda + 1}}. \tag{20}$$

On peut observer que cette jacobienne apparaît par comparaison avec (18)

comme l'*adjointe d'indice* — 2 de $F^{\lambda+2}$, c'est-à-dire l'adjointe d'indice — 2 de la *variété base* du système.

Remarque. — Les formules (15), (16) et (18) ont été établies en supposant que l'hypersurface F était suffisamment *générique* dans V_n, c'est-à-dire pouvait varier dans un système linéaire suffisamment ample (au moins $\infty^{\lambda+1}$ pour pouvoir exprimer K_λ^F). Ces mêmes formules peuvent servir à *définir* les systèmes $|K_\lambda^F|$ dans les cas où les raisonnements précédents ne seraient plus valables : par exemple si F est *isolée* dans V_n, ou *réductible* ou virtuelle. De même si F possède quelque singularité la formule (18) définit les $|K_\lambda^W|$ en considérant ces singularités comme virtuellement inexistantes.

26. On a obtenu précédemment les variétés canoniques d'une *intersection complète* d'hypersurfaces : on peut, au moyen de la formule obtenue, exprimer les variétés canoniques de la *somme* de deux hypersurfaces; bien entendu cette expression a le sens précisé à la fin du numéro précédent : si F_1 et F_2 sont deux hypersurfaces, une variété canonique de la somme $F_1 + F_2$ est une variété canonique d'une variété F générique (lorsqu'elle existe) vérifiant l'équivalence $F \equiv F_1 + F_2$.

Si une telle variété n'existe pas, (14) donnera par *définition* la variété canonique cherchée; on obtient ainsi

$$K_\lambda^{F_1+F_2} \equiv \frac{(F_1+F_2)K_{\lambda-1}^n}{1-(F_1+F_2)K}, \tag{21}$$

formule qui se généralise avec facilité au cas d'un nombre quelconque d'hypersurface.

En particulier (21) donne les variétés canoniques du *multiple* d'une hypersurface

$$K_\lambda^{(pF)} \equiv \frac{pFK_{\lambda+1}^n}{1-pFK}. \tag{22}$$

CHAPITRE IV.

EXEMPLES DE VARIÉTÉS CANONIQUES.

27. Commençons par remarquer que, étant donnée une variété V_n, la recherche effective de ses systèmes canoniques peut se faciliter si l'on connaît un système $|F|$ d'hypersurfaces dont les *variétés canoniques des différentes caractéristiques sont connues*, car alors la formule (12) montre que, pour trouver K_λ^n, il suffit de faire varier F dans un système $\infty^{\lambda+1}$ et de prendre la jacobienne J_λ de ce système; dans le second membre de (12) tous les termes sont connus sauf le premier, K_λ (1), c'est-à-dire la variété K_λ^n que l'on désire. D'une manière toute semblable la formule (20), transformation de (12) au moyen des théorèmes d'adjonction, fournit K_λ^n à partir d'un système $|F|$, cette fois les variétés canoniques de dimension supérieure à λ étant supposées connues.

On peut aller plus loin dans cette voie en donnant à λ dans (20) successivement les valeurs $n-1$, $n-2$, ..., $\lambda+1$, λ; on aboutit ainsi à un système d'équations linéaires qui, résolu en K_λ, donne l'expression suivante

$$(23) \qquad K_\lambda^n \equiv \sum_0^\infty (-1)^\alpha \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} (F^\alpha J_{\lambda+\alpha}),$$

avec la convention habituelle relative à la limite supérieure de α.

$$(J_n \equiv 1,\ J_\rho \equiv 0 \text{ si } \rho > n)$$

(23) peut s'écrire *symboliquement*

$$(23') \qquad K_\lambda^n \equiv \frac{J^\lambda}{(1+FJ)^{\lambda+2}}.$$

28. Appliquons ce qui précède à la recherche des variétés canoniques d'un *espace projectif* à n dimensions, $[n]$. Dans un tel espace on voit immédiatement un système d'hypersurfaces F particulièrement simple : celui formé des hyperplans de $[n]$; dans ces conditions on a

$$J_\rho \equiv 0, \qquad \text{si } \rho \neq n,$$

car un système linéaire d'hyperplan ne possède pas de variété jacobienne. Le seul terme non nul dans le développement (23) est celui correspondant à $\lambda+\alpha=n$ pour lequel $J_n=1$, d'où

$$(24) \qquad K_\lambda^{[n]} \equiv (-1)^{n-\lambda} \binom{n+1}{\lambda+1} F^{n-\lambda};$$

dans la suite nous désignerons par P un hyperplan d'un espace projectif, de sorte que (24) s'écrit

$$K_\lambda^n \equiv (-1)^{n-\lambda} \binom{n+1}{\lambda+1} P^{(n-\lambda)},$$

$P^{(n-\lambda)}$ représente ainsi un espace projectif à λ dimensions $[\lambda]$ (1). Remarquons que la formule (24) eût très bien pu se démontrer par le premier procédé indiqué au numéro précédent les variétés caractéristiques de F sont en effet toutes des *espaces projectifs* et le procédé d'induction complète est tout indiqué dans ce cas.

29. Faisons une application de la formule (24) à la recherche du degré de la jacobienne d'un système linéaire de formes de $[n]$ de degré p.

Dans ce cas, on a $F \equiv pP$ et la formule (20), qui développée s'écrit

$$J_\lambda \equiv \sum_0^\infty \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} (F^\alpha K_{\lambda+\alpha}^{[n]}),$$

devient, compte tenu de ce qui précède et de (24),

$$J_\lambda \equiv \sum_0^\infty \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} (-1)^{n-\lambda-\alpha} p^\alpha P^\alpha \binom{n+1}{\lambda+\alpha+1} P^{n-\lambda-\alpha}$$

(1) En particulier pour $n=1$, $\lambda=0$, on retrouve le fait que le groupe canonique d'une droite (ou d'une courbe rationnelle) est formé de -2 points. Pour $n=2$ on obtient la courbe canonique et la série de Severi du plan projectif.

ou

$$J_\lambda \equiv \sum_0^\infty (-1)^{n-\lambda} P^{n-\lambda} \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} \binom{n+1}{\lambda+\alpha+1} (-p)^\alpha;$$

mais

$$\binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha}\binom{n+1}{\lambda+\alpha+1} = \binom{n+1}{\lambda+1}\binom{n-\lambda}{\alpha},$$

d'où

$$J_\lambda \equiv (-1)^{n-\lambda}\binom{n+1}{\lambda+1} P^{n-\lambda} \sum_0^\infty \binom{n-\lambda}{\alpha}(-p)^\alpha.$$

Dans le second membre la sommation va jusqu'à $\alpha = n-\lambda$, car les termes suivants sont identiquement nuls; dans ces conditions la somme n'est autre que le développement de $(1-p)^{n-\lambda}$ et est égal à $(-1)^{n-\lambda}(p-1)^{n-\lambda}$, d'où l'expression définitive de J_λ

$$J_\lambda \equiv (p-1)^{n-\lambda}\binom{n+1}{\lambda+1} P^{n-\lambda}. \tag{25}$$

Remarque. — Si $p=0$, on retrouve pour J_λ la *variété canonique* K^n_λ en vertu de (24); le fait est général, K^n_λ peut se considérer comme la jacobienne à λ dimensions d'un système linéaire formé de variétés (virtuelles) *nulles* $F \equiv 0$, ainsi que le montre (12) ou (20).

30. Passons maintenant à la détermination des systèmes canoniques d'une *hypersurface* de degré p de $[n]$, $F \equiv pP$. Il est indiqué de se servir de la formule (21) donnant les systèmes canoniques du multiple d'une hypersurface. On a immédiatement la variété adjointe de F

$$A^F_\lambda \equiv \sum_0^\infty p^\alpha P^\alpha K^{[n]}_{\lambda+1\ \alpha},$$

ou, en tenant compte de (24),

$$A^F_\lambda \equiv (-1)^{n-\lambda-1} P^{n-\lambda-1} \sum_0^\infty \binom{n+1}{\lambda+2+\alpha}(-p)^\alpha. \tag{26}$$

L'infini est atteint ici pour $\lambda+2+\alpha = n+1$, c'est-à-dire pour $\alpha = n-\lambda-1$. Le degré de A^F_λ est

$$\binom{n+1}{0} P^{n-\lambda-1} + \ldots + (-1)^\beta \binom{n+1}{\beta} P^{n-\lambda-1-\beta} + \ldots + (-1)^{n-\lambda-1}\binom{n+1}{\lambda+2}.$$

Nous verrons au numéro suivant sous quelle forme on peut mettre ce degré (et celui de la variété canonique correspondante, section de F par A^F_λ).

31. De la même manière on peut appliquer la formule (18) pour la détermination des systèmes canoniques d'une variété W, intersection complète de k formes de $[n]$ [supposée privée de points multiples, du moins virtuellement ainsi que cela a été indiqué à propos de l'application de la formule (18) dans la remarque du n° 25] soient $F_i \equiv p_i P$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, les k formes, on a

$$A^W_\lambda \equiv \frac{K^{[n]}_{\lambda+k}}{\prod_1^k (1 - p_i P K)}.$$

Pour donner au second membre une forme commode, désignons par $\varphi(t)$ la fraction rationnelle

$$\varphi(t) = \frac{1}{\prod_{1}^{k}(1-p_i t)} = \sum_{0}^{\infty} c_\alpha t^\alpha \tag{27}$$

(l'expression explicite de c_α en fonction des p_i serait aisée à obtenir, mais est inutile ici).

L'expression de A_λ^W devient ainsi

$$A_\lambda^W \equiv \sum_{0}^{\infty} c_\alpha \left(P^\alpha K_{\lambda+k+\alpha}^{[n]}\right), \tag{28}$$

dans laquelle il faut remplacer $K_{\lambda+k+\alpha}^{[n]}$ par sa valeur tirée de (24), c'est-à-dire par $(-1)^{n-\lambda-k-\alpha}\binom{n+1}{\lambda+1+k+\alpha} P^{n-\lambda-k-\alpha}$, $P^{n-\lambda-k}$ se met alors en facteur et l'on a

$$A_\lambda^W \equiv P^{n-\lambda-k}\omega,$$

où ω est le degré de A_λ^W égal à

$$\omega = \sum_{0}^{\infty} c_\alpha (-1)^\alpha \binom{n+1}{\lambda+1+k+\alpha} (-1)^{n-\lambda-k}.$$

Si maintenant on envisage le polynome

$$\psi(t) \equiv \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} t + \ldots \equiv (1-t)^{n+1},$$

on voit que le coefficient de $t^{n-\lambda-k}$ dans le produit $\varphi\psi$ n'est autre que ω; on a par suite (1)

$$\omega = [\varphi(t)\,\psi(t)]_{n-\lambda-k} = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{\Pi(1-p_i t)}\right]_{n-k-\lambda},$$

ou encore (en vertu des propriétés rappelées en note)

$$\omega = \left[\frac{(t-1)^{n+1}}{\Pi(t-p_i)}\right]_{(\lambda+1)}. \tag{29}$$

32. On peut encore obtenir une expression analogue de ω par un procédé intéressant pour la suite (n° 33).

Remarquons pour cela que $K_\lambda^{[n]}$ pour un espace projectif, n'est autre, d'après le développement du second membre de (23) qui nous a conduit à (24), que le coefficient de J^μ dans le développement de la fraction rationnelle $\frac{J^\lambda}{(1+J)^{\lambda+1}}$, au facteur $P^{n-\lambda}$ près.

Il suit de là que, si l'on remplace les $K_\lambda^{[n]}$ par ces développements dans l'expression (28) de A_λ^n, on obtient une fraction rationnelle en J dont il suffit de

(1) Je désigne par $[f(t)]_\alpha$ le coefficient de t^α dans le développement de $f(t)$ en série de Laurent autour de $t = 0$. On a les égalités évidentes

$$[t^k f]_{\alpha+k} = [f]_\alpha; \qquad [f(-t)]_\alpha = (-1)^\alpha [f(t)]_\alpha; \qquad \left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_\alpha = [f(t)]_{(-\alpha)}.$$

prendre le coefficient du terme en J^n pour avoir ω. Or (28) donne

$$\omega = \left[\sum_0^\infty c_\alpha \frac{J^{\lambda+k+\alpha}}{(1+J)^{\lambda+k+2}} \frac{1}{(1+J)^\alpha} \right]_{(n)},$$

c'est-à-dire

$$\omega = \left[\frac{J^{\lambda+k}}{(1+J)^{\lambda+k+2}} \varphi\left(\frac{J}{1+J}\right) \right]_{(n)},$$

d'après le développement (27) de $\varphi(t)$; mais

$$\varphi\left(\frac{J}{1+J}\right) = \frac{(1+J)^k}{\Pi(1-\overline{p-1}J)};$$

par suite la valeur de ω est, avec un léger changement inessentiel de notation,

$$\omega = \left[\frac{1}{(1+t)^{\lambda+2}\Pi(1-\overline{p-1}t)} \right]_{(n-\lambda-k)}. \tag{30}$$

L'identité des deux expressions (*polynomes* en p_i) (30) et (29) est facile à vérifier (par l'égalité pour $p_i = 1$ des dérivées partielles en p_i)(1). En particulier pour $p_i = 1$ on retrouve bien la valeur $(-1)^{n-\lambda-k}\binom{n-k+1}{\lambda+1}$ qui convient à un espace linéaire à $(n-k)$ dimensions d'après (24). Si dans les formules précédentes on fait $k=1$, on retrouve les résultats du n° 30 mis sous une forme plus condensée.

Vérification directe des résultats qui précèdent.

33. Il n'est pas sans intérêt de vérifier directement les formules (30) et (28) que nous venons d'obtenir, par le calcul du degré de A_λ^W à partir des équations de cette variété. De plus ce même calcul nous donnera aussi une vérification de la formule générale (20) donnant la jacobienne d'un système linéaire d'hypersurfaces.

Envisageons donc dans l'espace projectif $[n]$, dont $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées homogènes, la variété W intersection complète de k formes des degrés p_i

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0. \tag{31}$$

---

(1) On peut aussi observer que

$$[f(t)]_{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt,$$

où le contour C entoure l'origine dans le sens direct.

Par suite si dans l'intégrale :

$$\omega_{30} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\theta^{\lambda+k-n-1}}{(1+\theta)^{\lambda+2}\Pi(1-\overline{p_i-1}\,\theta)}\,d\theta,$$

on fait le changement de variables (suggéré par la remarque de la fin du n° 24) $t = \frac{1+\theta}{\theta}$, on obtient l'intégrale

$$\omega_{29} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(t-1)^{n+1}}{t^{\lambda+2}\Pi(t-p_i)}\,dt$$

où le contour C entoure le point à l'infini du plan (t). L'égalité de ces deux intégrales montre ainsi l'identité des expressions (29) et (30) de ω.

Coupons cette variété par un système $\infty^{\lambda+1}$ de formes de $[n]$ de degré ν. Soient

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_{\lambda+1} = 0,$$

$(\lambda+2)$ formes linéairement indépendantes servant de base à ce système.

Proposons-nous de définir la jacobienne J_λ^F. En un point M de cette variété les $\lambda+1$ hyperplans tangents à $\lambda+1$ hypersurfaces du système et les k plans tangents aux formes (31) définissant W ont un $[n-\lambda-k]$ en commun d'après la définition de J_λ.

Il suit de là que les $\lambda+2+k$ hyperplans polaires de M par rapport aux formes f_i et F_j ont un $[n-\lambda-k-1]$ commun. Cela veut dire que la matrice (à $\lambda+2+k$ lignes et $n+1$ colonnes)

$$(32) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_0} & \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_0}{\partial x_0} & \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial x_0} & \frac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

est de rang égale à $\lambda+k+1$, c'est-à-dire que cette matrice est nulle.

Par suite J_λ est défini comme l'intersection de W avec la variété représentée par (32) égalée à zéro [qui est bien $n-(n+1-\lambda-k-1)=\lambda+k$ dimensions; avec les k conditions imposées par (31) cela donne bien λ comme dimension de J_λ]. Il suffit donc d'évaluer le degré de (32).

Or, cette évaluation est classique (1) connaissant les degrés des termes de la matrice : ici cette dernière a une composition uniforme par rapport aux colonnes, et le degré des termes d'une ligne est p_i-1 pour la ligne de rang $i \leq k$ et $\nu-1$ pour les lignes suivantes.

Il suit de là que ce degré est donné par le déterminant :

$$\delta = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n+1-\lambda-k} \\ 1 & p_1 & \cdots & p_{n-\lambda-k} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1, \ldots, p_1 \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$(1-\overline{\nu-1}\,t)^{\lambda+2}\prod^{k}(1-\overline{p_i-1}\,t) = \sum^{\infty} p_\alpha t^\alpha$$

ou encore δ n'est autre (avec la notation introduite au n° 31, que

$$(33) \qquad \delta = \left[\frac{1}{(1-\overline{\nu-1}\,t)^{\lambda+2}\Pi(1-\overline{p_i-1}\,t)} \right]_{(n-k-\lambda)}$$

(1) *Cf.* par exemple *Enzykl. Math. Wiss.*, III, C. 7, p. 828 et suiv.

Pour simplifier posons $p_i = 1 + n_i$, on a

$$\delta = \left[\frac{1}{(1-\nu-1\,t)^{\lambda+2}\Pi(1-n_i t)} \right]_{(n-k-\lambda)} \tag{34}$$

Développons δ en le considérant comme une fonction de ν : *a priori* la série du binome montre que $\delta(\nu)$ est un polynome de degré $(n-k-\lambda)$ en ν. Cherchons-en le développement au moyen de la formule de Mac-Laurin (¹), en remarquant qu'il est légitime de dériver sous le signe [ ] par rapport à ν. On a ainsi

$$\delta'(\nu) = \left[\frac{(\lambda+2)t}{(1-\nu-1\,t)^{\lambda+3}} \frac{1}{\Pi(1-n_i t)} \right]_{n-k-\lambda)}$$

et d'une façon générale

$$\delta^{(\alpha)}(\nu) = \frac{(\lambda+1+\alpha)!}{(\lambda+1)!} \left[\frac{t^\alpha}{(1-\nu-1\,t)^{\lambda+1+\alpha}\Pi(1-n_i t)} \right]_{n-k-\lambda)},$$

d'où la valeur des dérivées à l'origine

$$\delta^{(\alpha)}(0) = \frac{(\lambda+1+\alpha)!}{(\lambda+1)!} \left[\frac{1}{(1+t)^{\lambda+1+\alpha}\Pi(1-n_i t)} \right]_{n-k-\lambda-\alpha)}$$

et par suite le développement requis

$$\delta(\nu) = \sum_0^{n-k-\lambda} \binom{\lambda+\alpha+1}{\alpha} h(\lambda+\alpha)\nu^\alpha \tag{35}$$

en posant

$$h(\mu) = \left[\frac{1}{(1+t)^{\mu+1}\prod_1^k (1-n_i t)} \right]_{(n-k-\mu)} \tag{36}$$

Le fait que le coefficient de $\binom{\lambda+\alpha+1}{\alpha}\nu^\alpha$ dans l'expression de $\delta(\nu)$, qui *a priori* est une fonction de λ et de α ne dépend en réalité que de la somme $\lambda+\alpha$ est très important, car si l'on désigne par $H_{k+\mu}$ une variété à $k+\mu$ dimensions de degré $h(\mu)$ et par K_μ^W l'intersection $(WH_{k+\mu})_{,,}$ en remarquant que F est de degré ν et que par suite F^α est de degré ν^α, on voit que la formule (35) exprime que la jacobienne J_λ est de même degré que la combinaison second membre développé de (20) :

$$\sum_0^\infty \binom{\lambda+\alpha+1}{\alpha} (K_{\lambda+\alpha}^W F^\alpha).$$

Bien entendu cela ne prouve point l'équivalence des deux variétés (du moins pour $k > 1$), mais cela donne une vérification numérique de la formule (20).

On voit que $h(\mu)$ n'est autre que le degré de l'adjointe A_μ^W, degré obtenu aux nos 31 et 32; les deux formules (36) et (30) ne sont en effet qu'une seule et même formule.

(¹) On pourrait aussi poser $\varphi(\nu, t) = \frac{1}{(1-\nu-1\,t)^{\lambda+2}\Pi(1-n_i t)}$ et développer $\varphi(\nu, t)$ par rapport à ν en appliquant la série du binome.

SUR

L'ARITHMÉTIQUE DES QUATERNIONS

ET DES

BIQUATERNIONS

Par M. Gaston BENNETON.

PRÉFACE.

Ce Mémoire comprend deux parties, dont on trouvera le résumé en plusieurs Notes dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [17].

La première partie étudie les propriétés des quaternions entiers. On connaît les résultats essentiels obtenus dans ce domaine par Hurwitz [11] : son arithmétique des quaternions, dont l'ordonnance s'inspire de la théorie des corps de nombres algébriques, est basée sur l'existence d'un plus grand commun diviseur valable dans tous les cas; à cet effet sont considérés comme entiers non seulement les quaternions à composantes entières mais ceux dont les composantes sont des moitiés de nombres impairs. Nous suivons ici une méthode différente : nous définissons *a priori* les quaternions entiers comme ayant les composantes entières, puis nous construisons leur arithmétique en prenant pour base l'existence même des diviseurs premiers. L'étude des facteurs premiers y précède donc la théorie du plus grand commun diviseur.

Pour décomposer les quaternions en facteurs premiers, nous indiquons deux procédés de calcul effectif. Le premier, analogue au raisonnement de Lagrange [2] sur les sommes de quatre carrés, équivaut à la recherche, par divisions successives, des diviseurs communs à deux quaternions dont l'un est premier scalaire. Le second procédé, obtenu par itération, est d'ordre plus général et s'étend aisément au cas des facteurs non premiers.

Des résultats complémentaires seront publiés ultérieurement concernant la théorie des diviseurs et du plus grand commun diviseur, ainsi que l'application des quaternions à l'étude des matrices orthogonales d'ordre 4 à termes entiers.

La deuxième partie traite de l'arithmétique des biquaternions, nombres hypercomplexes d'ordre 8 comprenant les quaternions comme cas particulier. La multiplication n'y est pas associative et, dans la division par un nombre entier naturel, la notion de reste doit être sensiblement modifiée. La décomposition en facteurs premiers, généralement possible, s'obtient par un algorithme simple tout à fait semblable au second procédé des quaternions, qui ne suppose pas l'associativité du produit. Enfin le théorème de la décomposition des biquaternions permet de retrouver les énoncés de Jacobi sur la représentation des nombres entiers par une somme de huit carrés.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici mes sentiments de vive gratitude à mon maître M. Paul Montel et à M. A. Châtelet, dont les suggestions et les conseils m'ont été d'une aide précieuse.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES.

[1] L. Euler, *Œuvres*.

[2] J.-L. Lagrange, *Œuvres*, 3, Paris, 1869, p. 189.

[3] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, 1801.

[4] A.-M. Legendre, *Théorie des Nombres*, 2, Paris, 1830, p. 144.

[5] C. G. Jacobi, *Fundamenta nova*, Königsberg, 1829, p. 106, 184; *Werke*, 1, Berlin, 1891, p. 239; *Werke*, 6, p. 245.

[6] A. Cayley, *Philos. Trans. London*, 148, 1858, p. 17; *Math. Papers*, 2, Cambridge, 1889, p. 475.

[7] A. Cayley, *London Edinb. Dublin philos. mag.*, 26, 1845, p. 210; *Math. Papers*, 1, Cambridge, 1889, p. 127, 301.

[8] F. Brioschi, *J. reine angew. Math.*, 52, 1856, p. 133.

[9] C. Jordan, *Traité des substitutions*, Paris, 1870, p. 156.

[10] R. Lipschitz, *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*, Bonn, 1886; *J. Math. pures et appl.*, (4), 2, 1886, p. 373.

[11] A. Hurwitz. *Nachr. Ges. Göttingen*, 1896, p. 313, 336; *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin, 1919.

[12] A. Hurwitz, *Nachr. Ges. Göttingen*, 1898, p. 309.

[13] G. Fontené, *Bull. Soc. math. France*, 27, 1899, p. 171.

[14] E. Dubois, *Intermédiaire des mathématiciens*, 18, 1911, p. 55.

[15] L. E. Dickson, *Proc. of the London math. Soc.*, 1921, p. 225.

[16] *C. R. Acad Sc.*, Paris, 212, 1941, p. 591, 637.

[17] *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 207, 1938, p. 108; 214, 1942, p. 406, 459; 216, 1943, p. 262.

PREMIÈRE PARTIE.

LES QUATERNIONS ENTIERS.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. *Définitions et formules.* — Les quaternions sont des nombres complexes d'ordre 4, c'est-à-dire des expressions linéaires de trois symboles i, j, k

$$A = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

dont les composantes x_s, ou coordonnées, seront dans cette étude des nombres entiers (éventuellement des fractions de dénominateur 2). L'addition et la multiplication se font comme celles de polynomes en i, j, k, compte tenu de la table de multiplication suivante

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad \begin{aligned} jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j, \\ ij &= -ji = k. \end{aligned}$$

Rappelons quelques définitions et propriétés usuelles de l'algèbre de ces nombres.

La multiplication des quaternions est associative, distributive par rapport à l'addition, mais non commutative. Toutefois un nombre naturel x_0 peut être considéré comme un quaternion, dit *scalaire*, dont le produit avec tout autre quaternion est commutatif.

Deux quaternions ayant même première composante (partie scalaire) et dont les autres composantes sont opposées deux à deux sont dits *conjugués* :

$$A = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \qquad \overline{A} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k;$$

leur produit est un nombre scalaire positif, qui est leur *norme* commune

$$N(A) = N(\overline{A}) = A\overline{A} = \overline{A}A = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués changés d'ordre

$$\overline{AB} = \overline{B}\,\overline{A}.$$

La norme d'un produit se calcule immédiatement : elle vaut le produit des normes, comme il résulte aussi de l'identité de Lagrange

$$N(AB) = N(BA) = N(A)\,N(B).$$

Ceci montre qu'un produit est nul seulement si l'un des facteurs est nul, de sorte que, par exemple,

$$AB = AB' \quad (A \neq 0) \qquad \text{entraîne} \quad B = B'.$$

Notons que la division à droite ou à gauche est possible, sauf par zéro; elle donne en général des quaternions à composantes fractionnaires.

Il y a huit quaternions J entiers de norme 1

$$\pm 1, \quad \pm i, \quad \pm j, \quad \pm k,$$

dont les inverses sont aussi des quaternions entiers (égaux ou opposés); ils constituent le groupe des *unités*. Multiplier par une unité ne change pas la norme.

Signalons enfin qu'on ne change pas la partie scalaire d'un produit en faisant une permutation circulaire des facteurs.

C'est essentiellement la propriété multiplicative de la norme qui justifie l'introduction des quaternions en arithmétique : *décomposer un nombre entier a en une somme de quatre carrés équivaut à trouver deux quaternions conjugués dont ce nombre est le produit*

$$a = A\bar{A} = N(A);$$

pour décomposer un produit ab en une somme de quatre carrés, on peut décomposer chaque facteur et composer les résultats obtenus soit par l'identité de Lagrange, soit par le produit des quaternions

$$ab = N(A)\,N(B).$$

Notations. — En principe nous désignons des quaternions de même norme par une même majuscule diversement accentuée, et la norme commune par la minuscule correspondante

$$a = N(A) = N(A') = N(A'') \ldots.$$

2. *Points de vue.* — Comme nous venons de le dire, l'arithmétique des quaternions est étroitement liée à la représentation des nombres par une somme de quatre carrés, et on peut étudier l'une afin de compléter l'autre.

En ce qui concerne l'étude des quaternions entiers; il existe plusieurs points de vue, d'ailleurs peu différents les uns des autres :

a. Définition *a priori* du *quaternion entier en tant que quaternion à composantes entières*. Pour de tels quaternions la théorie des diviseurs et du p. g. c. d. n'est pas valable dans tous les cas, et il faut étudier spécialement certaine classe où le facteur 2 joue un rôle particulier.

Cette définition, la première en date est celle de Lipschitz [10]. Elle a été reprise par L. E. Dickson [15].

b. Construction d'une arithmétique des quaternions basée, comme l'arithmétique élémentaire, sur l'existence d'un p. g. c. d. toujours valable. Ainsi

procède Hurwitz [11]; à cet effet il nomme *quaternions entiers* non seulement les quaternions à composantes entières mais encore ceux dont les composantes sont des moitiés de nombres impairs.

c. Étude d'un système de pseudo-quaternions, où la définition de base des produits unitaires est par exemple

$$1i = -i1 = i, \qquad i^2 = 1, \qquad jk = -kj = i,$$

où i, j, k désignent trois unités permutables circulairement. Une telle définition donne à la multiplication la presque-commutativité que ne possèdent pas les quaternions, $BA = AB1$. L'associativité par contre n'existe plus. L'arithmétique obtenue est presque identique à celle des quaternions; l'étude des produits de deux facteurs y est un peu plus simple [16].

d. Étude des quaternions d'après les vues de Cayley sur la théorie des matrices [6]. Les quaternions entiers sont représentés par des matrices carrées d'ordre 4 et correspondent à des substitutions linéaires orthogonales de quatre variables à coefficients entiers.

Nous choisissons le premier point de vue. D'ailleurs nous aurons recours aux considérations *b* et *d* pour étendre ou préciser certains résultats.

3. *Divisibilité des quaternions*. — La notion de divisibilité de l'arithmétique s'étend évidemment aux quaternions entiers à condition de distinguer les diviseurs à droite ou à gauche. On obtient ainsi les définitions et propriétés suivantes :

Un quaternion A est *divisible par un scalaire* entier m, à la fois à droite et à gauche, s'il existe un quaternion X tel que

$$A = mX = Xm.$$

Pour cela il faut et il suffit que les quatre composantes de A soient divisibles par m.

Un quaternion A est *divisible à gauche par un quaternion* B (ou à droite par un quaternion C) s'il existe un quaternion X (ou Y), qui est alors déterminé, tel que

$$A = BX \qquad \text{ou} \qquad A = YC.$$

Pour cela il faut et il suffit que

$$BA = N(B)X \qquad \text{ou} \qquad \bar{B}A \text{ } \textit{divisible par } b,$$
$$A\bar{C} = YN(C) \qquad \text{ou} \qquad A\bar{C} \text{ } \textit{divisible par } c.$$

En particulier, comme il a été dit, tout quaternion divise sa norme, et divise un multiple quelconque de sa norme. *Pour qu'un scalaire m soit divisible par un quaternion* A, *à droite ou à gauche, il faut et il suffit que m soit divisible par la norme de* A :

$$m = aq \qquad \text{équivaut à} \qquad m = A(q\bar{A}) = (q\bar{A})A.$$

Tout diviseur à droite d'un diviseur à droite est un diviseur à droite. De même à gauche. La divisibilité est unilatéralement *transitive*.

Les diviseurs scalaires jouant un rôle particulier, nous allons en indiquer quelques propriétés. Mais d'abord introduisons deux locutions (analogues à celles de l'arithmétique des polynomes) :

un quaternion est *primitif* si ses composantes sont premières entre elles dans leur ensemble;

tout quaternion est le produit d'un quaternion primitif par un entier positif qui est son *plus grand diviseur* (p. g. d.) *scalaire*.

Ceci posé :

les diviseurs scalaires d'un quaternion sont les diviseurs de son p. g. d. scalaire.

Si un nombre m divise le produit de deux quaternions AB *et s'il est premier avec la norme de l'un, il divise l'autre*. En effet *m* doit diviser

$$\overline{A}AB = N(A)\,(\text{p. g. d. scalaire B})\,B_1,$$

B_1 étant un quaternion primitif; donc *m* divise le p. g. d. scalaire de B.

De cet énoncé résulte que :

si deux quaternions ont des normes premières entre elles, le p. g. d. scalaire de leur produit est le produit des p. g. d. scalaires des facteurs.

En particulier, le produit de deux quaternions primitifs dont les normes sont premières entre elles est primitif. Il est aisé de voir sur des exemples que la propriété n'est plus vraie si les normes ne sont pas premières entre elles.

4. *Quaternions associés. Facteurs.* — 1° Un diviseur scalaire d'un quaternion est défini au produit près par ± 1. Un diviseur à gauche B (ou à droite C) est défini au produit près à droite (ou à gauche) par les huit unités J :

$$BJ \quad (\text{ou } JC).$$

Suivant une locution usuelle d'arithmétique générale, ces huit quaternions seront dits *associés à gauche* (ou à droite).

En particulier tout diviseur A admet comme diviseurs impropres (ou triviaux) :

des deux côtés, les huit unités J;
à gauche, les huit associés à gauche AJ;
à droite, les huit associés à droite JA.

Tout autre diviseur dont la norme est comprise entre 1 et N(A), est *diviseur propre*.

2° Plus généralement appelons quaternions *associés* à A tous les produits de la forme JAJ', les unités pouvant être multipliées à droite et à gauche.

Si B est diviseur de A (à droite ou à gauche), tous les quaternions associés à B sont diviseurs d'un quaternion associé à A. En effet

$$A = BC \qquad \text{équivaut à} \quad JAJ' = JBJ''(J''CJ').$$

On peut donc se borner à étudier la divisibilité d'un quaternion défini à la multiplication près par une unité à droite ou à gauche. Un tel quaternion joint à tous ses associés sera appelé un *facteur*. Ainsi les quaternions JAJ', qui sont au nombre de 32 distincts ou non (*cf.* n° 18), constituent le facteur $\mathfrak{A}$ associé à A. L'égalité ci-dessus devient

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{BC}.$$

où les facteurs $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ ne sont d'ailleurs pas complètement indépendants.

Les huit unités forment le facteur unité $\mathfrak{I}$. Tout autre facteur a pour diviseurs impropres lui-même et le facteur unité. Tout facteur dont la norme est un nombre premier ne possède aucun diviseur propre.

Si deux quaternions A et $\overline{A}$ sont conjugués, tous leurs associés sont conjugués deux à deux; ils définissent deux facteurs $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}}$, encore appelés *conjugués* et tels que

$$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}} = a\mathfrak{I}.$$

5. *Restes des quaternions* (mod m). — Selon une locution usuelle, deux quaternions A et B sont *congrus* ou appartiennent à une *même classe* suivant le *module scalaire* m (entier positif), si leur différence est divisible par m :

$$A \equiv B \pmod{m} \qquad \text{équivaut à} \quad A - B = mU.$$

Les classes ainsi définies s'ajoutent, se retranchent et se multiplient (produit non-commutatif). La propriété dont nous ferons surtout usage est :

Tous les quaternions d'une même classe (mod m) *ont les mêmes diviseurs de norme* m, *à droite ou à gauche, si toutefois il en existe.*

En effet, avec les précédentes notations

$$A = MX \qquad \text{entraîne} \quad B = M(X - \overline{M}U),$$
$$A = X'M' \qquad \text{entraîne} \quad B = (X' - U\overline{M}')M'.$$

La classe nulle, contenant zéro, est l'ensemble des quaternions multiples de m.

D'importantes démonstrations de l'arithmétique élémentaire sont basées sur le fait que, dans toute classe d'entiers (mod m), il existe un entier (reste) compris entre zéro et m, ou encore compris entre $\frac{-m}{2}$ et $\frac{m}{2}$ (reste absolu minimum). Pour les quaternions la propriété analogue est celle-ci :

Dans une classe de quaternions (mod m), *il existe au moins un quaternion* R, que nous appelons *reste*, *dont la norme est au plus égale à* m^2, l'égalité n'ayant lieu que si m est pair.

En effet, parmi tous les quaternions congrus à A (mod m), considérons le quaternion R dont les composantes sont les restes minima absolus de celles de A : *chaque composante de* R *a une valeur absolue au plus égale à* $\frac{m}{2}$. La norme de R est au plus égale à m^2 ; elle n'égale m^2 que si A est de la forme

$$A = \frac{m}{2} C \qquad (m \text{ pair}),$$

les composantes de C étant toutes impaires.

CHAPITRE II.

DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS.

6. *Méthode de décomposition en facteurs premiers.* — Nous disons qu'un quaternion est *premier si sa norme est un nombre premier.* Il est nécessairement primitif et n'a pas de diviseur propre.

Dans ce Chapitre nous étudions d'abord la décomposition des quaternions primitifs. Nous montrons que tout quaternion primitif A est un produit de quaternions premiers P dont les normes sont les facteurs premiers de la norme de A, et nous indiquons le moyen de calculer les diviseurs P à partir de A. Puis nous étudions les quaternions scalaires et nous montrons qu'ils sont toujours décomposables en produit de quaternions premiers. De là nous passons aux quaternions quelconques, eux aussi décomposables.

Il en résulte alors que les quaternions premiers sont les seuls à n'avoir pas de diviseur propre, ce qui justifie leur nom. Quant à la propriété d'arithmétique élémentaire, à savoir qu'un nombre premier ne peut diviser un produit de deux entiers sans diviser l'un d'eux, elle n'a pas d'équivalent pour les quaternions en raison de la non-commutativité de la multiplication.

En fin de Chapitre nous recherchons les quaternions primitifs de norme donnée, et nous donnons une démonstration du théorème de Jacobi sur les sommes de quatre carrés.

Bien entendu la notion de facteur (ensemble de quaternions associés) permet de simplifier la plupart des énoncés.

Pour étudier la décomposition d'un quaternion primitif A, nous en calculerons d'abord un diviseur premier à gauche P dont la norme divise celle de A, c'est-à-dire que nous résoudrons l'égalité

$$A = PQ; \qquad N(A) = pq, \qquad N(P) = p.$$

Examinons en premier lieu le cas de $p = 2$ qui présente des anomalies.

7. *Existence d'un diviseur de norme* 2. — *Si* N(A) *est double de nombre impair,* A *est divisible à gauche (ou à droite) par un seul des trois quaternions*

de norme 2

$$1+i,\quad 1+j,\quad 1+k,$$

et par ses associés.

Si N(A) *est multiple de* 4, A *est divisible à droite et à gauche par tous les quaternions de norme* 2.

Remarquons d'abord qu'*il n'y a pas de quaternion primitif de norme divisible par* 8.

Le quaternion primitif A et son reste $A_0 \pmod 2$ ont les mêmes diviseurs à gauche de norme 2. Mais leurs normes sont congrues entre elles $(\mathrm{mod}\,4)$ de sorte que, suivant le cas, la norme de A_0, au plus égale à 4 et non nulle, est 2 ou 4.

Dans le premier cas A_0 est la somme de deux unités, c'est donc l'associé d'un seul des trois quaternions $1+i$, $1+j$, $1+k$.

Dans le second cas les composantes de A_0 sont ± 1, et suivant le module 2, on peut les prendre positives. A_0 s'écrit alors

$$1+i+j+k=(1+i)(1+j)=(1+j)(1+k)=(1+k)(1+i).$$

En résumé, si la norme de A est paire :

$$\mathrm{N(A)} \not\equiv 0 \pmod 4, \qquad A=(1+i)Q \text{ ou } (1+j)Q' \text{ ou } (1+k)Q'',$$
$$\mathrm{N(A)} \equiv 0 \pmod 4, \qquad A=(1+i)Q=(1+j)Q'=(1+k)Q''.$$

Notons que si un quaternion a pour norme 2, chacun de ses associés est simultanément associé à droite et à gauche. Tout diviseur à gauche de norme 2 est aussi diviseur à droite, et inversement.

8. *Existence d'un diviseur premier de norme impaire. — Un quaternion primitif* A *dont la norme est multiple d'un nombre premier impair* p *a un diviseur à gauche (ou à droite)* P *de norme* p *et un seul, défini au produit près à droite, (ou à gauche) par une unité.*

Remplaçons A par son reste A_0 suivant le module p. La norme de A_0, qui est encore multiple de p, est inférieure à p^2 et non nulle puisque A est primitif

$$A=pQ_0+A_0, \qquad \mathrm{N}(A_0)=pq_1, \qquad 0<q_1<p.$$

Formons le reste R_1 de A_0 suivant le module q_1 ; sa norme est un multiple q_1q_2 au plus égal à q_1^2. Mais le quaternion q_2A_0 est divisible à droite par R_1 puisque (n° 3)

$$q_2A_0\overline{R}_1 \equiv q_2A_0\overline{A}_0=q_2q_1p \equiv 0 \pmod{q_1q_2}.$$

D'où, en rassemblant les résultats

$$R_1 \equiv A_0 \pmod{q_1}, \qquad \begin{matrix} \mathrm{N}(A_0)=pq_1, \\ q_2A_0=A_1R_1. \\ \mathrm{N}(R_1)=q_1q_2. \end{matrix} \qquad \left\{ \begin{matrix} \mathrm{N}(A_1)=pq_2, \\ 0 \leqq q_2 \leqq q_1. \end{matrix} \right.$$

Faisons la même opération sur A_1. Nous en déduisons des quaternions R_2, A_2, et un nombre q_3 au plus égal à q_2. Ainsi de suite. Après h opérations nous obtenons

$$\begin{gathered} N(A_{h-1}) = pq_h. \\ R_h \equiv A_{h-1} \pmod{q_h}, \qquad q_{h-1}A_{h-1} = A_h R_h, \qquad \begin{cases} N(A_h) = pq_{h-1} \\ 0 \leqq q_{h-1} \leqq q_h. \end{cases} \\ N(R_h) = q_h q_{h-1}. \end{gathered}$$

Arrêtons le calcul lorsque pour la première fois q_{h-1} est égal à l'une de ses limites, ce qui a lieu notamment si $q_h = 1$, car le reste de A_{h-1} suivant le module 1 est nul.

1° Si q_{h-1} est nul, R_h est nul. A_{h-1} est divisible par q_h et sa norme pq_h est divisible par q_h^2. Le nombre p étant premier, il s'ensuit

$$q_h = 1, \qquad A_{h-1} = P, \qquad N(P) = p.$$

Éliminons les A_i entre les $h - 1$ premières égalités

$$q_2 q_3 \dots q_{h-1} A_0 = P R_{h-1} \dots R_2 R_1.$$

Le scalaire $q_2 q_3 \dots q_{h-1}$, produit de nombres inférieurs à p, est premier avec la norme de P ; il divise donc le produit des R_i de sorte que

$$A_0 = PR', \qquad A = P(R' + \overline{P}Q_0).$$

Nous avons construit un diviseur de A, à gauche, P de norme p.

Ce diviseur P est unique, au produit près par une unité à droite. En effet A et A_0 ont les mêmes diviseurs à gauche de norme p, et il en est ainsi pour deux quaternions successifs quelconques A_{i-1} et A_i, à partir de A_0. Pour cela comparons les divisibilités par p des produits $\overline{X}A_{i-1}$ et $\overline{X}A_i$:

$$q_{i-1}(\overline{X}A_{i-1}) = (\overline{X}A_i)R_i, \qquad N(R_i) = q_i q_{i+1}.$$

q_{i-1} et la norme de R_i sont des nombres premiers avec p : la divisibilité par p est bien identique pour les deux produits.

2° Si q_{h+1} était égal à q_h, ces nombres seraient pairs et R_h serait le produit de leur moitié par un quaternion C de norme 4 ; de sorte que A_{h-1} serait divisible par $\frac{q_h}{2}$ et sa norme pq_h le serait par $\frac{q_h^2}{4}$. Ceci entraînerait, p étant premier,

$$q_h = 4, \qquad A_{h-1} = 2P, \qquad P \equiv C \pmod 2, \qquad N(P) = p.$$

Mais P admettrait, comme C, un diviseur de norme 2 et la norme p serait paire. L'hypothèse envisagée est impossible.

Note. — La démonstration, basée sur la construction de nombres entiers décroissants q_i, est inspirée du raisonnement fait par Lagrange [2], par une méthode de descente, pour démontrer le théorème de Bachet. Nous établissons plus loin ce théorème, en prouvant que tout scalaire est la norme d'un quaternion entier.

9. *Deuxième procédé.* — Supposons la norme de A égale à pq_1 et formons le reste R_1 de $\overline{A}$ suivant le module q_1; la norme de R_1 est un multiple de q_1 au plus égal à q_1^2

$$R_1 \equiv \overline{A} \pmod{q_1}, \qquad N(R_1) = q_1 q_2, \qquad 0 \leqq q_2 \leqq q_1.$$

La recherche des diviseurs de A à gauche de norme p *équivaut* à la recherche des diviseurs (complémentaires) de A à droite de norme q_1, qui sont eux-mêmes les conjugués de diviseurs à gauche de R_1. Renouvelons l'opération en considérant

$$R_2 \equiv \overline{R}_1 \pmod{q_2}, \qquad N(R_2) = q_2 q_3, \qquad 0 \leqq q_3 \leqq q_2,$$

et ainsi de suite. Après h opérations nous obtenons

$$R_h \equiv \overline{R}_{h-1} \pmod{q_h}. \qquad N(R_h) = q_h q_{h+1}, \qquad 0 \leqq q_{h-1} \leqq q_h,$$

où il suffit d'étudier les diviseurs de R_h à gauche de norme q_h pour montrer l'existence des diviseurs de A de norme p.

Cessons le calcul lorsque pour la première fois q_{h+1} est égal à l'une de ses limites. Ceci correspond à (n° 5)

$$R_h = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{q_h}{2} C. \qquad\qquad q_{h+1} = 0 \quad \text{ou} \quad q_h.$$

la norme de C étant égale à 4.

D'une manière générale supposons

$$R_i = \frac{m}{2} C_i, \qquad q_{i+1} \equiv q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

et montrons que ces conditions s'étendent à l'indice $i-1$:

$$R_{i-1} = \frac{m}{2} \overline{C}_i + q_i X, \qquad N(R_{i-1}) = N(R_i) + q_i \frac{m}{2} (X C_i + \overline{C}_i \overline{X}) + q_i^2 N(X),$$

X étant entier; ce qui entraîne bien

$$R_{i-1} = \frac{m}{2} C_{i-1}, \qquad q_{i-1} = q_{i+1} + \text{partie scalaire}\,(m X C_i) + q_i N(X) \equiv 0 \pmod{m},$$

les normes de C_i et de C_{i-1} étant multiples de 4.

Or R_h est de la forme $\frac{m}{2} C$, et q_{h+1}, q_h sont divisibles par $m = q_h$. En raisonnant de proche en proche sur $R_{h-1}, \ldots, R_2, R_1, A$, nous voyons que q_h doit diviser en même temps $2A$, p et q_1; il vaut nécessairement 1 si l'on suppose A primitif et p premier impair. Donc

$$q_h = 1, \qquad q_{h+1} = 0.$$

Les diviseurs de R_{h-1} à gauche de norme q_{h-1} existent : ce sont les associés à gauche. Par conséquent A possède des diviseurs à gauche de norme p. Il en résulte des égalités de la forme

$$A = PQ_1, \qquad R_1 = \overline{Q}_1 Q_2, \qquad \ldots, \qquad R_{h-1} = \overline{Q}_{h-1} J.$$

où J est une unité. L'élimination des Q_i donne l'expression du diviseur P

$$q_1 q_2 \dots q_{h-1} P = A R_1 R_2 \dots R_{h-1} J,$$

diviseur unique, au produit près à droite par une unité J.

Remarques. — 1° Ce procédé de décomposition est plus général que celui du n° 8, car il ne suppose pas essentiellement p premier. Il suffit en effet que p, q_1 et le p. g. d. scalaire de 2A soient premiers entre eux dans leur ensemble. Nous reviendrons sur ce point.

2° Changeons l'ordre ou le signe des composantes de A. Les restes successifs R_i subissent la même permutation ou le même changement de signe de leurs composantes. Leurs normes sont les mêmes, leur nombre h ne varie pas.

En particulier aux divers quaternions associés à A correspond un même nombre de restes, h.

10. *Décomposition d'un quaternion primitif.* — Considérons un quaternion primitif A ayant pour norme un produit de facteurs premiers rangés dans un ordre choisi d'avance $p_1 p_2 p_3 \dots$. Nous savons calculer un diviseur à gauche P_1 de norme p_1, diviseur unique au produit près par une unité (sauf cas particulier relatif au facteur 2), de sorte que

$$A = P_1 Q_1, \qquad N(Q_1) = p_2 p_3 \dots.$$

A son tour le quaternion Q_1, nécessairement primitif, possède un diviseur à gauche P_2 de norme p_2

$$Q_1 = P_2 Q_2, \qquad A = P_1 P_2 Q_2, \qquad N(Q_2) = p_3 \dots.$$

Et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les facteurs p_i; le dernier quotient Q_{h-1} sera nécessairement un diviseur premier P_h de norme p_h. Nous aboutissons au résultat suivant.

Théorème. — *La norme d'un quaternion primitif* A *étant décomposée en facteurs premiers non nécessairement distincts rangés dans un certain ordre*

$$N(A) = p_1 p_2 p_3 \dots$$

le quaternion peut être décomposé en un produit de quaternions premiers

$$A = P_1 P_2 P_3 \dots$$

dont les normes sont respectivement les nombres $p_1, p_2, p_3, \dots$. *La décomposition est unique*, au produit près de chaque quaternion par une unité. Toutefois s'il y a deux normes p_α et $p_{\alpha'}$ égales à 2, pour la première d'entre elles le quaternion correspondant peut être remplacé indifféremment par un quaternion quelconque de norme 2 (ce qui modifie alors tous les facteurs P_i situés entre P_α et $P_{\alpha'}$, à moins que ces deux derniers quaternions ne soient consécutifs).

L'utilisation des facteurs au lieu des quaternions donne à l'énoncé une forme plus concise :

A tout arrangement des facteurs premiers de la norme d'un *facteur primitif* $\mathfrak{A}$ correspond une seule décomposition de $\mathfrak{A}$ en facteurs premiers de normes rangées dans le même ordre

$$N(\mathfrak{A}) = p_1 p_2 p_3 \ldots, \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \ldots, \qquad N(\mathfrak{P}_i) = p_i.$$

Toutefois s'il y a deux facteurs $\mathfrak{P}$ de norme 2, le premier d'entre eux peut être remplacé par un facteur quelconque de norme 2; il y a alors trois décompositions distinctes.

Réciproque. — *Un produit de facteurs premiers*

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{P}''_1 \ldots \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}'_2 \ldots \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}'_3 \ldots, \qquad N(\mathfrak{P}_i) = N(\mathfrak{P}'_i) \ldots = p_i$$

dont les normes respectives aux indices sont les nombres premiers impairs distincts $p_1, p_2, p_3, \ldots$, *est un facteur primitif s'il n'y a pas de facteurs conjugués consécutifs.*

Raisonnons par l'absurde sur le produit $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{R}$, en supposant $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ primitif et $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ non primitif. $\mathfrak{P}'$ est le facteur situé le plus à gauche qui rende le produit non primitif. $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ est alors divisible par la norme commune de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$. Le facteur $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ est divisible à droite par $\overline{\mathfrak{P}'}$; étant primitif il n'a qu'un seul diviseur à droite de norme p, à savoir

$$\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}'}.$$

Note. — Hurwitz [11], après Lipschitz [10], a énoncé le théorème de la décomposition d'un quaternion primitif; il l'a montré en établissant d'abord la théorie du p. g. c. d. Dans le présent travail, ce théorème résulte de la décomposition, effective en facteurs premiers.

11. *Décomposition d'un nombre premier scalaire.*

Théorème. — *Tout nombre premier scalaire p est le produit de deux quaternions conjugués de* $8(p+1)$ *manières différentes.*

Corollaire. — *Tout scalaire entier est la norme d'un quaternion entier.* Ce qui équivaut au *théorème de Bachet* : tout nombre entier est une somme de quatre carrés.

Le théorème est évident pour $p = 2$

$$2 = (1+i)\mathrm{J}.\bar{\mathrm{J}}(1-i) = (1+j)\mathrm{J}.\bar{\mathrm{J}}(1-j) = (1+k)\mathrm{J}.\mathrm{J}(1-k).$$

où J est une des huit unités.

Pour un nombre premier impair p nous montrons d'abord l'existence d'un quaternion primitif de norme divisible par p, donc divisible à gauche par un quaternion premier P de norme p. Nous considérons ensuite l'ensemble des multiples du même quaternion premier

$$PX \qquad (X \text{ quaternion entier quelconque})$$

que nous appelons *idéal à droite* de norme p. Nous caractérisons cet ensemble en y distinguant un quaternion de forme simple, quaternion *réduit*. La détermination de tous les quaternions réduits correspondant au nombre premier p permet de trouver tous les idéaux à droite de norme p, et par suite toutes les décompositions de p.

12. *Ensemble des multiples d'un quaternion premier.* — 1° On sait depuis Euler que, pour tout nombre premier p, la congruence

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

a au moins une solution x_0, y_0. (Nous reviendrons plus loin sur l'existence et la recherche de ces solutions.) Le quaternion primitif correspondant

$$A = 1 + x_0 j + y_0 k$$

a sa norme divisible par p, de sorte qu'il existe au moins un quaternion P de norme p.

2° Considérons l'ensemble des multiples

$$PX \qquad (X \text{ quaternion entier quelconque}).$$

L'ensemble contient la somme ou la différence de deux quelconques de ses termes et le produit de l'un quelconque par tout quaternion entier. C'est un *idéal à droite* au sens général de ce mot. Cet idéal est *principal* : il est engendré par l'un quelconque des huit associés PJ et ne renferme aucun autre quaternion de norme p. Il contient par ailleurs tout quaternion congru à chacun de ses termes, il est formé de classes (mod p) :

$$PX + pX_1 = P(X + \bar{P}X_1).$$

Nous allons montrer que :

Parmi les multiples d'un quaternion premier P *se trouve un quaternion simple, ou réduit, dont la partie scalaire vaut* 1 *et dont l'une des trois autres composantes est nulle.* Si cette composante est la seule nulle, elle peut être choisie arbitrairement, par exemple la seconde.

Il équivaut de dire :

un quaternion premier P *est diviseur à gauche d'un quaternion de l'une des formes*

$$1 + ai, \qquad 1 + bj + ck.$$

Pour définir l'ensemble des multiples choisissons un associé PJ dont la première composante ne soit pas nulle,

$$\mathrm{PJ} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \qquad (x_0 \not\equiv 0) \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Si l'un des nombres x_2, x_3 n'est pas nul, nous considérons le multiple

$$\mathrm{PJ}(x_0 - x_1 i) = y_0 + y_2 j + y_3 k \qquad (y_0 = x_0^2 + x_1^2),$$

y_0, inférieur à p, n'est pas divisible par p et l'inégalité

$$\mathrm{N(P)}.(x_0^2 + x_1^2) > y_0^2$$

montre que y_2 ou y_3 n'est pas nul. Nous avons ainsi un quaternion de l'ensemble de la forme

$$x_0 + x_1 i \quad \text{ou} \quad y_0 + y_2 j + y_3 k \qquad (x_0 y_0 \not\equiv 0) \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Il suffit de multiplier par l'inverse de la première composante x_0 ou y_0, suivant le module p, pour obtenir un quaternion congru à un quaternion de l'une des formes

$$1 + ai, \qquad 1 + bj + ck.$$

13. *Unicité des quaternions réduits.* — Vérifions maintenant que le quaternion réduit d'un même ensemble de multiples est unique (à un multiple près de p). De façon équivalente :

Pour que deux quaternions de l'une des formes

$$1 + ai, \qquad 1 + bj + ck$$

soient multiples (*à droite*) *d'un même quaternion premier de norme p, il faut et il suffit qu'ils soient congrus* (mod p).

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$1 + bj + ck = \mathrm{PQ}, \qquad 1 + b'j + c'k = \mathrm{PQ_1}$$

est

$$(1 - bj - ck)(1 + b'j + c'k) = \overline{\mathrm{Q}}\,\overline{\mathrm{P}}\mathrm{PQ_1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$

ceci d'après la réciproque de la décomposition d'un quaternion primitif. Cette condition équivaut à

$$1 + bb' + cc' + (cb' - bc')i + (b' - b)j + (c' - c)k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$
$$b \equiv b', \qquad c \equiv c' \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$

en supposant bien entendu la norme de PQ divisible par p.

Comparons de même un quaternion de la première forme à un de la seconde. La condition

$$(1 - ai)(1 + bj + ck) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

est impossible, la partie scalaire du produit valant 1.

Enfin pour deux quaternions de la première forme la condition

$$(1-ai)(1+a'i)=1+aa'+(a'-a)i\equiv 0 \pmod p$$

équivaut à leur congruence suivant le module p.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les quaternions de norme p et les quaternions réduits de norme divisible par p.

Pour les quaternions de norme p, la construction des ensembles de multiples se ramène à la résolution de la congruence

$$x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod p;$$

à une solution (b, c) formée de deux entiers non nuls (mod p) correspond un ensemble défini par le quaternion réduit

$$1+bj+ck=PQ;$$

à une solution comportant un entier nul $(0, a)$ correspondent trois ensembles définis par les quaternions réduits

$$1+ai=P_1Q_1, \qquad 1+aj=P_2Q_2, \qquad 1+ak=P_3Q_3.$$

On peut dire encore :

le nombre des quaternions de norme p vaut huit fois le nombre total des solutions des deux congruences (indépendantes)

$$x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod p,$$
$$x^2+1\equiv 0 \pmod p.$$

14. *Formation des quaternions réduits.* — 1° Étudions d'abord la congruence

$$x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod p.$$

Résoudre cette congruence c'est chercher les décompositions de -1 en nombres de Gauss [3] :

$$-1\equiv (x+yi)(x-yi) \pmod p.$$

Premier cas. $p+1$ est multiple de 4. L'entier p n'est pas décomposable, c'est un nombre de Gauss, premier. Il y a p^2-1 classes (mod p) premières avec p engendrées par les puissances de l'une d'elles (racine primitive)

$$G^\alpha \qquad (\alpha \text{ défini, mod } p^2-1).$$

Le conjugué de G^α est la puissance $G^{p\alpha}$. La décomposition de -1 est donnée par l'égalité

$$G^\alpha G^{p\alpha}\equiv G^{\frac{p^2-1}{2}} \pmod p$$

ou

$$\alpha\equiv\frac{p-1}{2} \pmod{p-1}.$$

On obtient ainsi $p+1$ solutions

$$x+yi\equiv\left(G^{\frac{p-1}{2}}\right)^{2\lambda+1} \qquad (\text{mod } p;\ \lambda=0,\ 1,\ \ldots,\ p),$$

qui sont les puissances impaires de l'une quelconques d'entre elles

$$x+yi\equiv(x_0+y_0i)^{2\lambda+1} \qquad (\text{mod } p).$$

Il est à remarquer qu'aucun des nombres x, y n'est nul.

Deuxième cas. $p-1$ est multiple de 4. L'entier p est décomposable

$$p=(a+bi)(a-bi).$$

Les classes (mod p) premières avec p se déduisent des classes prises suivant les modules respectifs $a+bi$ et $a-bi$. Pour chacun de ces modules, il y a $p-1$ classes, engendrées par les puissances d'une racine primitive.

Appelons G une racine primitive suivant le module $a+bi$. Les classes (mod p) premières avec p sont

$$G^\alpha\overline{G}^\beta \qquad (\alpha,\ \beta \text{ définis, mod } p-1);$$

et la décomposition de -1 est donnée par l'égalité

$$G^\alpha\overline{G}^\beta.\overline{G}^\alpha G^\beta\equiv-1\equiv(G\overline{G})^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\text{mod } p)$$

ou

$$\alpha+\beta\equiv\frac{p-1}{2} \qquad (\text{mod } p-1).$$

Posons

$$\alpha\equiv\frac{p-1}{4}+\lambda \quad (\text{mod } p-1), \qquad \overline{G}G'\equiv1\ (\text{mod } p).$$

Nous obtenons les $p-1$ solutions

$$x+yi\equiv(G\overline{G})^{\frac{p-1}{4}}(GG')^\lambda \qquad (\text{mod } p;\ \lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).$$

En considérant les solutions particulières correspondant à $\lambda=1$,

$$x_0+y_0i\equiv-mGG', \qquad m^2+1\equiv0 \qquad (\text{mod } p),$$

nous pouvons écrire pour la solution générale

$$x+yi\equiv-m^{\lambda+1}(x_0+y_0i)^\lambda \qquad (\text{mod } p).$$

Nous y retrouvons notamment les puissances impaires de x_0+y_0i.

2° A chaque solution $x+yi$ de la congruence correspond le quaternion réduit

$$1+(x+yi)j=1+xj+yk.$$

Et les formules précédentes en λ permettent d'exprimer tous les quaternions réduits (mod p) à partir de l'un d'eux.

Si $p-1$ est multiple de 4, il y a en outre deux quaternions réduits supplémentaires qui sont

$$1 \pm mi, \qquad m^2+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le nombre des quaternions réduits est donc, dans tous les cas,

$$p+1=(p-1)+2.$$

Le nombre de décompositions annoncé du scalaire premier p vaut bien $8(p+1)$.

15. *Décomposition d'un quaternion quelconque.* — Considérons un quaternion quelconque A ayant pour norme un produit de facteurs premiers rangés dans un ordre choisi d'avance :

$$N(A)=p_1p_2p_3\ldots, \qquad A=\pi_1\pi_2\ldots B, \qquad (B \text{ primitif}),$$

où $\pi_1\pi_2\ldots$ est la décomposition en facteurs premiers du p. g. d. scalaire de A.

Si A est divisible par p_1, il admet comme diviseurs à gauche les $8(p_1+1)$ quaternions de norme p_1. Si p_1, supposé impair, ne divise pas A, il existe 8 quaternions associés P_1 de norme p_1 diviseurs à gauche de B et par suite de A. Enfin si p_1 égale 2 et que les composantes de A soient toutes impaires, celles de B le sont aussi et A est divisible à gauche par tous les quaternions de norme 2. Nous pouvons écrire dans tous les cas

$$A=P_1Q_1, \qquad N(Q_1)=p_2p_3\ldots.$$

A son tour Q_1 est divisible à gauche par certains quaternions de norme p_2. Et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement de tous les facteurs p_1. Il en résulte que :

Tout quaternion est décomposable en produit de quaternions premiers dont les normes sont rangées dans un ordre choisi d'avance.

Le nombre des décompositions (définies au produit près des quaternions par une unité) est

$$h_1h_2h_3\ldots, \qquad h_i=1 \quad \text{ou} \quad (p_i+1).$$

On montre d'ailleurs que ce nombre ne dépend pas de l'ordre des facteurs p_i.

Supposons alors, dans la décomposition de la norme de A, que les facteurs premiers égaux soient consécutifs, et considérons les décompositions correspondantes du quaternion A. Chacune d'elles comprend nécessairement (réciproque du n° 10) deux facteurs conjugués consécutifs, de norme π_1 par exemple. Faisons abstraction de ces deux facteurs. Le produit restant est le quaternion non primitif $\pi_2\ldots B$ et renferme à son tour deux facteurs conjugués consécutifs de norme π_2 par exemple. Ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des facteurs du p. g. d. scalaire; le dernier produit est une décomposition du quaternion primitif B.

Le nombre des décompositions vaut donc

$$(\pi_1+1)(\pi_2+1)\dots,$$

nombre qui doit être triplé si la norme de B est multiple de 4.

Bien entendu le raisonnement s'applique à la décomposition des scalaires non premiers, pour lesquels B égale 1.

16. *Décomposition en produit de quaternions réduits.* — 1° Considérons un quaternion premier P. Il lui correspond un quaternion réduit U admettant P comme diviseur à gauche

$$PQ = U.$$

Retrouvons le diviseur P à partir de U en utilisant le procédé du n° 9. Nous obtenons

$$q_1 q_2 \dots q_{h-1} P = U R_1 R_2 \dots R_{h-1} J.$$

Or les restes successifs R_i sont des quaternions réduits de la même forme que U. L'unité J, si elle est différente de 1, a pour double un produit de quaternions réduits

$$2J = (1+J)^2.$$

Par conséquent le quaternion premier P est décomposable en un produit de quaternions réduits, à un coefficient scalaire l près :

$$lP = UU_1U_2\dots.$$

2° Le résultat s'étend immédiatement à tout quaternion non premier A; il suffit de considérer A comme un produit de quaternions premiers, et ces derniers comme des produits de quaternions réduits :

Tout quaternion A *est décomposable en un produit de quaternions réduits, à un coefficient scalaire l près*

$$lA = UU_1U_2U_3\dots.$$

17. *Nombre des quaternions de norme n.* — Si p est premier, le nombre des quaternions de norme p vaut

$$r(p) = 8(p+1).$$

Pour n quelconque, le théorème du n° 10 et sa réciproque permettent d'obtenir, sans répétition, tous les quaternions primitifs de norme n par leur décomposition en facteurs premiers. Cherchons donc d'abord le nombre $t(n)$ des quaternions primitifs de norme n.

1° Appelons p un diviseur premier de $n = pn_1$. Comparons $t(n)$ à $t(n_1)$.

Si p ne divise pas n_1, tout quaternion primitif N_1 de norme n_1 engendre $r(p)$ quaternions primitifs PN_1 de norme n. Inversement tout quaternion primitif N

se décompose en produit PN_1 de 8 manières associées. D'où

$$t(n) = \frac{r(p)}{8} t(n_1) = (p+1)t(n_1).$$

Si p impair divise n_1, et si P_1 de norme p divise à gauche le quaternion primitif N_1, le produit PN_1 est primitif à condition que PP_1 ne soit pas divisible par p, c'est-à-dire que P et $\overline{P_1}$ ne soient pas associés à droite. Inversement tout quaternion primitif N provient ainsi de 8 quaternions N_1. D'où

$$t(n) = \frac{r(p)-8}{8} t(n_1) = pt(n_1).$$

Si $p = 2$ divise n_1 sans diviser $\frac{n_1}{2}$, P et $\overline{P_1}$ ne doivent pas être associés à droite. Inversement tout quaternion primitif N provient de $r(p) = 24$ quaternions N_1, d'où

$$t(n) = \frac{r(p)-8}{r(p)} t(n_1) = \frac{2}{3} t(n_1).$$

Si $\frac{n_1}{2}$ est pair, n est multiple de 8 et N est divisible par 2. Par conséquent, m étant impair

$$t(2m) = 3t(m), \qquad t(4m) = 2t(m), \qquad t(8m) = 0.$$

La valeur de $t(n)$ se déduit aussitôt.

Le nombre des quaternions primitifs de norme n est égal à

$$t(n) = 8hn \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

produit étendu à tous les diviseurs premiers de n, le coefficient h valant zéro si n est multiple de 8, valant $\frac{1}{3}$ si n est quadruple de nombre impair, valant 1 dans tout autre cas.

2° Le nombre total des quaternions de norme n, primitifs ou non, se déduit du nombre des quaternions primitifs par l'égalité

$$r(n) = \sum t\left(\frac{n}{\delta^2}\right),$$

somme étendue à tous les carrés δ^2 diviseurs de n. Ce nombre est, comme $t(n)$, une fonction factorable. Si n est exactement divisible par p^α (p premier impair), le facteur correspondant de $t(n)$ vaut $p^\alpha + p^{\alpha-1}$, celui de $r(n)$ vaut donc

$$p^\alpha + p^{\alpha-1} \ldots + p + 1,$$

qui est aussi la somme des diviseurs de p^α. Si n est pair, quelle que soit la puissance de 2 qui divise n, le facteur correspondant de $r(n)$ vaut 3.

Le nombre total $r(n)$ s'obtient par multiplication et correspond au théorème suivant, dû à Jacobi [5] :

Le nombre $r(n)$ des quaternions de norme n vaut 8 fois ou 24 fois la somme des diviseurs impairs de n, suivant que n est impair ou pair.

18. *Nombre des facteurs de norme n.* — 1° Examinons d'abord le cas des facteurs premiers.

Tout facteur premier $\mathfrak{P}$ de norme p est diviseur à gauche d'un facteur réduit $\mathfrak{A}$ associé à un quaternion réduit A de la forme

$$A = 1 + xj + yk \qquad \text{ou} \qquad A = 1 + xi.$$

Inversement, pour que deux facteurs réduits $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ soient divisibles à gauche par le même facteur $\mathfrak{P}$, il faut et il suffit que

$$AJ\overline{A}_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

J désignant une unité quelconque. Pour cela il faut et il suffit que les valeurs absolues des composantes de A et de A_1 soient respectivement congrues suivant le module p.

En outre chaque facteur réduit étant primitif n'est divisible que par un seul facteur de norme p.

Cette correspondance biunivoque entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{P}$ donne le nombre des facteurs de norme p : il est égal au nombre total des solutions des deux congruences (indépendantes)

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}, \qquad x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

solutions limitées à l'intervalle $0, \frac{p}{2}$.

Le nombre des facteurs premiers de norme p vaut donc

$$\frac{p+1}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{p+7}{4},$$

suivant que p est un multiple de 4 diminué ou augmenté de 1. Il vaut 3 si p égale 2.

2° Les facteurs de norme composée n ne peuvent être étudiés aisément à partir de leur décomposition en facteurs premiers, car ces derniers sont liés entre eux et leur structure même intervient.

Pour abréger nous dirons qu'un facteur appartient à la forme $x^2+y^2+z^2+t^2$ si ses composantes sont en valeur absolue distinctes et positives : qu'il appartient à $2x^2+y^2$ si deux composantes ont une même valeur absolue et qu'une troisième soit nulle, etc.

Tout facteur appartenant à x^2, $2x^2$ ou $4x^2$ comprend 8 quaternions distincts. On le voit en considérant par exemple les facteurs de norme 1, 2 ou 4.

Tout facteur appartenant à x^2+y^2 ou $2x^2+2y^2$ comprend 16 quaternions distincts; c'est le cas des facteurs de norme 5 ou 10.

Tout autre facteur comprend 32 quaternions distincts. On le voit par l'étude directe des facteurs appartenant à

$$3x^2,\quad 3x^2+y^2,\quad 2x^2+y^2,\quad 2x^2+y^2+z^2,\quad x^2+y^2+z^2,\quad x^2+y^2+z^2+t^2,$$

ou bien en considérant les normes premières 3, 7, 11, 23, 59, 71 qui appartiennent successivement aux formes précédentes et pour lesquelles le nombre des quaternions $8(p+1)$ vaut 32 fois celui des facteurs.

Par conséquent, si n n'est ni un carré ni une somme de deux carrés, le nombre des facteurs de norme n et celui des facteurs primitifs de même norme valent respectivement

$$\frac{r(n)}{32},\qquad \frac{t(n)}{32}.$$

Si n est représentable par une somme de deux carrés, nous désignons par $r'(n)$ le nombre des solutions de l'équation en nombres entiers $x^2+y^2=n$ et par $t'(n)$ le nombre des solutions primitives de la même équation. On trouve que le nombre des facteurs de norme n et celui des facteurs primitifs valent respectivement

$$\frac{1}{32}\big(r(n)+6r'(n)\big),\qquad \frac{1}{32}\big(t(n)+6t'(n)\big)\qquad (n\text{ impair}),$$

$$\frac{1}{32}\big(r(n)+18r'(n)\big),\qquad \frac{1}{32}\left(t(n)+6t'(n)+12t'\left(\frac{n}{2}\right)\right)\qquad (n\text{ pair}).$$

DEUXIÈME PARTIE.

UNE ARITHMÉTIQUE DES BIQUATERNIONS.

CHAPITRE III.

CONSTRUCTION DES BIQUATERNIONS.

19. *Généralités.* — Les quaternions, nombres hypercomplexes d'ordre 4, possèdent essentiellement l'associativité du produit et la propriété multiplicative de la norme. Cette seconde propriété, qui correspond à l'identité de Lagrange, joue le principal rôle dans l'étude arithmétique des quaternions.

Aussi bien nous chercherons à étendre les résultats uniquement pour les nombres hypercomplexes d'ordre n supérieur à 4 qui vérifient la propriété multiplicative de la norme (somme des carrés des composantes). Cette extension suppose une formule transformant le produit de deux sommes de n carrés en une seule somme de n carrés. La formule existe pour $n=8$, qui est l'iden-

tité de Brioschi [8]. En outre, un théorème de Hurwitz [12] démontre l'impossibilité d'une telle formule pour n supérieur à 8.

Retrouvons l'identité de Brioschi et étudions toutes les manières possibles de l'écrire en nombres entiers.

Considérons un nombre hypercomplexe d'ordre 8

$$A = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$$

que nous écrivons encore, par abréviation,

$$A = [U, V],$$

U et V étant les quaternions de composantes respectives x_0, x_1, x_2, x_3 et x_4, x_5, x_6, x_7. Définissons comme suit le produit de A par un nombre hypercomplexe B d'ordre 8

$$AB = \| x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7 \|.S,$$

où S est une matrice carrée d'ordre 8 ayant ces propriétés : les termes de S dépendent linéairement des composantes de B, les composantes de AB sont entières s'il en est de même de A et B, la norme de AB est égale au produit des normes de A et B.

Chaque ligne de la matrice est une substitution linéaire orthogonale à coefficients entiers des composantes de B : elle contient donc ces composantes une fois, à l'ordre et au signe près. Chaque colonne de même, la matrice étant orthogonale.

Or on ne change pas le problème en permutant les composantes de A ou celles de AB, c'est-à-dire en permutant les lignes ou les colonnes de la matrice. Par de telles permutations, compte tenu de l'orthogonalité de la matrice, faisons en sorte que les quatre premiers termes de la première ligne se retrouvent à l'ordre et au signe près dans la première moitié des trois lignes suivantes. Ils figurent alors dans la seconde moitié des quatre dernières lignes. La matrice S se partage en quatre matrices orthogonales d'ordre 4, correspondant chacune à un produit de quaternions.

Les composantes du produit AB sont donc, à l'ordre près, celles de

$$[CE + DF, C'F' + D'E'],$$

où [C, D] et [E, F] sont respectivement *isomorphes* de A et B (c'est-à-dire diffèrent seulement par l'ordre et le signe de leurs composantes), où les quaternions C, D, E, F et C′, D′, E′, F′ sont isomorphes deux à deux et sont écrits à l'ordre près dans chacun des produits CE, DF, C′F′, D′E′.

Il reste à étudier la condition relative aux normes

$$N(AB) = N(A)N(B) + \text{partie scalaire}\,(2CE\bar{F}\bar{D} + 2C'F'\bar{E}'\bar{D}').$$

Cette partie scalaire doit être nulle quels que soient les quaternions. Les produits $E\bar{F}\bar{D}$ et $F'\bar{E}'\bar{D}'$ sont alors isomorphes, ce qui entraîne que $E\bar{F}$ et $F'\bar{E}'$

soient associés; c'est impossible pour des quaternions quelconques. Il faut donc intervertir certains facteurs et choisir l'une des formes

$$[CE + FD,\ C'F' + E'D'],$$
$$[CE + FD,\ F'C' + D'E'].$$

Dans la première forme les produits $E\overline{D}F$ et $\overline{F}'\overline{D}'\overline{E}'$ sont isomorphes, $E\overline{D}$ et $E'D'$ sont associés; de même $\overline{D}F\overline{C}$ et $C'F'\overline{D}'$ sont isomorphes, $\overline{C}F$ et $C'F'$ sont associés. Dans la seconde forme, l'échange des facteurs revient à écrire les produits conjugués.

En conclusion, les composantes du produit AB sont, à l'ordre près, celles de

$$[CE + FD,\ H + K],$$

les quaternions H et K, ou leurs conjugués, étant respectivement associés à $\overline{C}F$ et $E\overline{D}$.

20. *Les biquaternions.* — Parmi tous les systèmes correspondant aux diverses formules de multiplication, choisissons les nombres hypercomplexes qui s'apparentent le plus aux quaternions.

Nous supposons d'abord que pour A, B et AB, quatre composantes d'un même rang, les quatre premières par exemple, correspondent respectivement à C, E et CE + FD. Le système comprend alors les quaternions comme cas particulier

$$[X, O] = X \qquad \text{(quaternion X quelconque)}.$$

Désignons par D_0 et F_0 les quaternions relatifs aux quatre dernières composantes de A et B. Les quaternions D et F seront pris non seulement isomorphes, mais égaux à D_0 et F_0, ou à leurs conjugués, au signe près. Les quaternions H et K seront pris non seulement associés mais égaux à $\overline{C}F$ et $E\overline{D}$, ou à leurs conjugués, au signe près.

Deux seulement de ces nouveaux systèmes possèdent une *unité principale* 1 telle que $A1 = 1A = A$, quel que soit A. Ils sont définis respectivement par

$$[C, D_0].[E, F_0] = [CE - \overline{F}_0 D_0,\ F_0 C + D_0 \overline{E}],$$
$$[C, D_0].[E, F_0] = [CE - F_0 \overline{D}_0,\ \overline{C}F_0 + E D_0].$$

D'ailleurs on passe d'une formule à l'autre en changeant de signe les trois dernières composantes des facteurs et du produit (ce qui revient à changer de signe les trois dernières unités du système). Nous choisissons la première formule, parce qu'elle permet également d'obtenir le système des quaternions à partir des nombres complexes ordinaires. Et nous posons la définition suivante :

Un biquaternion A *est un nombre hypercomplexe d'ordre* 8 *déterminé par deux quaternions* C, D *qui jouent des rôles différents*

$$A = [C, D].$$

L'addition et la multiplication sont définies par

$$A+B=[C, D]+[E, F]=[C+E, D+F],$$
$$AB=[C, D].[E, F]=[CE-\overline{F}D, FC+D\overline{E}].$$

La règle du produit permet d'établir la table de multiplication des huit unités de base

$$1,\ i,\ j,\ k,\ [0,1],\ [0,i],\ [0,j],\ [0,k],$$

que nous désignerons aussi par $i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$. Les produits mutuels s'écrivent

$$J'[0, J]=-[0, J]J'=[0, JJ'],$$
$$[0, J][0, J']=J'J, \qquad [0, J']^2=-1,$$

J et J' étant l'une ou l'autre des quatre premières unités, J' étant toutefois différente de l'unité principale 1.

On voit ainsi que les sept dernières unités peuvent être groupées en *sept triades* où la loi de multiplication est vérifiée comme pour les quaternions unités i, j, k. Ce sont

$$(i_1, i_2, i_3),\ (i_1, i_4, i_5),\ (i_1, i_7, i_6),\ (i_2, i_4, i_6),\ (i_2, i_5, i_7),\ (i_3, i_4, i_7),\ (i_3, i_6, i_5).$$

Nous reconnaissons là une propriété des nombres étudiés par Cayley sous le nom d'*octaves* [7], eux-mêmes utilisés par G. Fontené sous le nom d'octants [13]. Notre système de biquaternions, à l'ordre près des unités, ne diffère pas des octaves de Cayley.

21. *Propriétés algébriques.* — 1° Le produit de deux biquaternions A et B est un biquaternion dont les composantes sont des formes bilinéaires des composantes de A et de B.

Remarquons que deux biquaternions, dont les quatre premières ou les quatre dernières composantes sont nulles, ont un produit de la même forme.

Le produit d'un nombre quelconque de biquaternions se calcule de proche en proche : on multiplie les deux premiers, on multiplie le résultat par le troisième, et ainsi de suite

$$ABCD=\big((AB)C\big)D.$$

La multiplication, distributive par rapport à l'addition, n'est *ni commutative*, *ni associative*.

Deux biquaternions ayant même première composante (partie scalaire), et dont les autres composantes sont opposées deux à deux, sont dits *conjugués*

$$A=[E, F], \qquad \overline{A}=[\overline{E}-F];$$

leur produit est un nombre scalaire égal à leur norme commune, somme des carrés des composantes

$$N(A)=N(\overline{A})=A\overline{A}=\overline{A}A.$$

C'est là un cas particulier de produit commutatif, un autre cas simple étant le produit de deux biquaternions dont l'un est scalaire.

Rappelons que *la norme d'un produit est égale au produit des normes*, par construction même des biquaternions. Il en résulte qu'un produit est nul seulement si un des facteurs est nul (il n'y a pas lieu par conséquent d'étudier les diviseurs de zéro) :

$$AB = AB' \quad (A \neq 0) \qquad \text{entraîne} \qquad B = B'.$$

Le *conjugué d'un produit* de deux facteurs est le produit des conjugués changés d'ordre

$$\overline{AB} = \overline{B}\,\overline{A}.$$

On le vérifie en remplaçant chaque facteur par ses quaternions composants. Cependant le produit $\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A}$ n'est pas le conjugué de ABC, la multiplication n'étant pas associative.

Il y a 16 biquaternions entiers (à composantes entières) de norme 1, qui forment le groupe des *unités*; elles seront habituellement désignées par J

$$\pm 1, \quad \pm i, \quad \pm j, \quad \pm k, \quad \pm i_4, \quad \pm i_5, \quad \pm i_6, \quad \pm i_7.$$

Leurs inverses sont aussi des biquaternions entiers. Le produit par une unité J ne change pas la norme.

2° Revenons sur les propriétés de la multiplication, notamment sur l'associativité. Nous allons indiquer des conditions suffisantes simples pour que trois biquaternions A, B, C vérifient

$$(AB)C = A(BC).$$

Tout d'abord il suffit qu'un des biquaternions soit un scalaire, celui-ci pouvant être associé à un facteur quelconque du produit.

Par ailleurs, sept triades d'unités suivent la loi de multiplication des quaternions unités i, j, k, et créent une sorte d'*associativité partielle*. Il suffit que A, B, C appartiennent en même temps au sous-système de biquaternions relatif à l'une des triades; ce qui a lieu, par exemple, si les deuxième, troisième, cinquième et huitième composantes sont nulles pour chaque biquaternion.

On trouve encore de nouvelles conditions en remplaçant A, B, C par leurs quaternions composants, et en étudiant les relations obtenues :

Il suffit que les facteurs extrêmes A et C soient égaux et qu'ils aient leurs quatre premières ou dernières composantes nulles

$$ABA = A(BA), \qquad A = [A', 0] \quad \text{ou} \quad [0, A'].$$

Ce qui a lieu notamment si A est l'une des seize unités

$$JBJ = J(BJ), \qquad N(J) = 1.$$

Il suffit enfin, condition importante, que les deux derniers biquaternions B et C soient conjugués

$$AB\overline{B} = bA, \qquad b = N(B).$$

Autrement dit, *deux biquaternions conjugués consécutifs d'un produit peuvent être remplacés par leur norme commune*

$$AB\overline{B}D = bAD, \qquad b = N(B).$$

Remarque. — Observons la gradation des propriétés pour les nombres hypercomplexes d'ordre 2^h, chaque système d'ordre 2^h étant un sous-système du suivant d'ordre 2^{h+1} :

$h = 1$, nombres complexes ordinaires (formant un corps) : la multiplication est commutative et associative;

$h = 2$, quaternions (formant un corps gauche) : la multiplication est associative, non commutative;

$h = 3$, biquaternions : la multiplication n'est ni commutative, ni associative;

$h = 4$, la mutiplication ne possède pas la propriété des normes.

CHAPITRE IV.

LES BIQUATERNIONS ENTIERS.

22. *Divisibilité des biquaternions entiers.* — Nous appelons *biquaternions entiers* ceux dont les composantes sont des nombres entiers. Cherchons-en les propriétés.

La multiplication n'étant pas en général associative, plusieurs résultats de l'arithmétique des quaternions ne s'étendent pas directement aux biquaternions. Une autre difficulté se présente : dans la division d'un quaternion par un entier scalaire m, la norme du reste est généralement inférieure à m^2, et cette propriété a donné une méthode de descente largement utilisée dans les premiers numéros; or, pour les biquaternions, une définition semblable du reste conduit à une norme inférieure seulement à $2m^2$.

Nous définissons, comme pour les quaternions (n° 3), la divisibilité à droite ou à gauche, en remarquant toutefois que le produit ABC, s'il est divisible à droite par C, n'est pas en général divisible à gauche par A. Nous obtenons la même condition de divisibilité suivante :

Pour que A *soit divisible par* B *à gauche* (*ou à droite*), *il faut et il suffit que* $\overline{B}A$ (ou $A\overline{B}$) *soit divisible par la norme de* B.

En effet, eu égard à l'associativité des facteurs conjugués,

$$A = BX \quad \text{équivaut à} \quad \overline{B}A = N(B)X,$$
$$A = YC \quad \text{équivaut à} \quad A\overline{C} = N(C)Y.$$

On démontre comme au n° 3 que, si deux biquaternions ont des normes premières entre elles, le p. g. d. scalaire de leur produit est le produit des p. g. d. scalaires des facteurs.

La notion d'associés à gauche (ou à droite) est moins utile, la divisibilité n'étant pas transitive pour les biquaternions. Toutefois nous conservons la définition : les *associés* à gauche de A sont les seize biquaternions AJ, où J désigne une unité quelconque. Inversement A est associé à AJ puisque $A = AJ\bar{J}$. Mais deux biquaternions associés à un même troisième ne sont pas nécessairement associés.

23. *Classes de biquaternions* (mod m). — Deux biquaternions A et B sont congrus suivant le module scalaire positif m, si leur différence est divisible par m

$$B \equiv A \pmod{m}.$$

Plus généralement nous dirons que A et B appartiennent à une *même classe* suivant le module m s'il existe un nombre entier u *premier avec* m tel que, suivant le cas,

$$B \equiv uA \pmod{m \text{ impair}},$$

$$B \equiv uA + \frac{m}{2}K \pmod{m \text{ pair}},$$

K désignant un biquaternion de norme o ou 8, dont toutes les composantes sont égales à o ou à 1. Ces deux congruences se réduisent d'ailleurs à la seconde, pour une valeur paire ou impaire de m. La définition est bien réciproque puisque

$$A \equiv u'B + \frac{m}{2}K, \quad uu' \equiv 1 \pmod{m}.$$

Les classes, suivant le module m, s'ajoutent, se retranchent et se multiplient (produit non associatif). Leur principale propriété est celle-ci :

Tous les biquaternions d'une même classe (mod m) *ont les mêmes diviseurs de norme* m, *à droite ou à gauche, si toutefois il en existe.*

En effet appelons M un biquaternion de norme m, et comparons les caractères de divisibilité de A et B, à droite par exemple. Si m est pair, toute forme linéaire des composantes de $\bar{M}$ dont les coefficients sont tous pairs ou tous impairs est divisible par 2; le produit $K\bar{M}$ est donc divisible par 2. Dans tous les cas nous pouvons écrire

$$B\bar{M} \equiv uA\bar{M} + \frac{m}{2}K\bar{M} \equiv uA\bar{M} \pmod{m}.$$

Si M est diviseur à droite de A, il l'est de B.

La *classe nulle*, contenant o, est l'ensemble des biquaternions divisibles par m, auxquels il convient d'ajouter, lorsque m est pair, tous ceux dont les compo-

santes sont des multiples impairs de $\frac{m}{2}$. Tout biquaternion de la classe nulle (mod m) est divisible à droite et à gauche par tous les biquaternions de norme m.

24. *Restes des biquaternions* (mod m). — Considérons un biquaternion A et prenons les restes minima absolus de ses composantes suivant le module m. Nous obtenons un biquaternion R de la même classe que A, dont les composantes ont une valeur absolue au plus égale à $\frac{m}{2}$, dont la norme est au plus égale à $2m^2$. Nous l'appelons *reste de* A suivant le module m :

$$R \equiv A \pmod{m}, \qquad N(R) \leqq 2m^2.$$

La même opération peut être faite sur tous les biquaternions d'une même classe. Nous allons montrer que,

dans une classe (mod m) *définie par le biquaternion* A, *il existe au moins un biquaternion* R_0 *dont la norme est au plus égale à* m^2 ; nous l'appelons *reste de la classe* ou *moindre reste de* A (mod m) :

$$R_0 \equiv uA + \frac{m}{2}K \pmod{m}, \qquad N(R_0) \leqq m^2.$$

1° Supposons m pair. En remarquant que $u = 1$ est le seul nombre qui soit premier avec tous les nombres pairs, nous considérons les deux restes

$$R \equiv A, \qquad R' \equiv A + \frac{m}{2}K \pmod{m}.$$

Si x est une des composantes du premier reste, la composante de même rang du second est $x \pm \frac{m}{2}$; la somme de leurs carrés est au plus égale à $\frac{m^2}{4}$, l'égalité n'ayant lieu que si x vaut 0 ou $\frac{m}{2}$. La somme des deux normes est donc inférieure à $2m^2$; elle égale $2m^2$ si quatre composantes sont nulles et que les quatre autres vaillent $\frac{m}{2}$.

Un au moins des deux restes R, R' *a une norme au plus égale à* m^2, certainement inférieure si A est primitif.

2° Supposons m impair. Les puissances de 2 sont les seuls nombres premiers avec tous les nombres impairs. Étudions donc les restes des multiples suivants de A :

$$R \equiv A, \qquad R_1 \equiv 2A, \qquad \ldots, \qquad R_\alpha \equiv 2^\alpha A \pmod{m}.$$

Soient $x, x_1, \ldots, x_\alpha$ les valeurs absolues des composantes d'un même rang des divers restes. x_1^2 est égal à $(2x)^2$ ou à $(m - 2x)^2$ suivant que x se trouve dans l'intervalle $\left(0, \frac{m}{4}\right)$ ou dans $\left(\frac{m}{4}, \frac{m}{2}\right)$. Supposons un instant que x prenne

toutes les valeurs rationnelles de chaque intervalle, entières ou non. A deux valeurs de x symétriques par rapport à $\frac{m}{4}$ correspond le même x_1. Le maximum de la somme $x^2+x_1^2$ a donc lieu dans l'intervalle $\left(\frac{m}{4}, \frac{m}{2}\right)$; la somme s'exprime alors par $x^2+(m-2x)^2$, trinome du second degré borné supérieurement par la plus grande des valeurs prises aux limites de l'intervalle : le maximum a lieu pour $x=\frac{m}{4}$.

Le raisonnement se poursuit pareillement : à deux valeurs de x_1 ayant pour somme $\frac{m}{4}+\frac{m}{2}$ correspond la même valeur de x_2. Le maximum de $x^2+x_1^2+x_2^2$ a lieu dans la première moitié de l'intervalle $\left(\frac{m}{4}, \frac{m}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{m}{4}, \frac{3m}{8}\right)$. La somme s'écrit alors

$$x^2+(m-2x)^2+(4x-m)^2.$$

Son maximum s'obtient à l'une des limites de l'intervalle, ici $\frac{3m}{8}$.

Par le même procédé dichotomique, en étudiant la formation des termes, on aboutit à la borne supérieure de

$$z=x^2+x_1^2+\ldots+x_x^2.$$

Les intervalles successifs sont limités par les fractions

$$u_1=\frac{m}{2}, \qquad u_2=\frac{m}{4}, \qquad u_3=\frac{3m}{8}, \qquad \ldots, \qquad u_x=\frac{2^x-(-1)^x}{3.2^x}m,$$

où chaque fraction est la moyenne arithmétique des deux précédentes. Par récurrence on prouve que la somme z est maximum à l'une des limites de l'intervalle (u_x, u_{x+1}) et qu'elle s'écrit alors

$$z=x^2+4\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+4\left(x-\frac{m}{4}\right)^2+\ldots+4^x(x-u_x)^2.$$

La valeur relative à $x=u_{x+1}$ est supérieure à celle qu'on obtient pour $x=u_x$.

Par conséquent, quel que soit x et particulièrement pour x entier, la somme z est inférieure à la valeur qu'elle prendrait pour $x=u_{x+1}$, c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$x^2+x_1^2+\ldots+x_x^2<\left(\frac{x+2}{9}+\frac{1}{27.(-2)^x}-\frac{1}{108.4^x}\right)m^2.$$

Nous obtenons notamment

$$x^2+x_1^2+\ldots+x_7^2<m^2.$$

Ajoutons maintenant les carrés des huit composantes; nous voyons que les normes de R, R_1, ..., R_7 ont une somme inférieure à $8m^2$. Une au moins des normes est donc inférieure à m^2 :

Si m est impair, un au moins des huit multiples A, 2A, 2^2A, ..., 2^7A *a pour reste* (mod m) *un biquaternion de norme inférieure à* m^2.

Augmentons indéfiniment le nombre α. La norme moyenne

$$\frac{1}{\alpha+1}[N(R)+N(R_1)+\ldots+N(R_\alpha)]$$

reste inférieure à un nombre qui tend vers $\frac{8}{9}m^2$. Appelons h le plus petit exposant vérifiant

$$2^h \equiv \pm 1 \pmod{m},$$

qui est d'ailleurs un diviseur de l'indicateur d'Euler $\frac{1}{2}\varphi(m)$. La norme de R_α redevient la même lorsque α augmente d'un multiple de h. Il s'ensuit que la norme moyenne des h premiers restes ne dépasse pas $\frac{8}{9}m^2$.

Si h est le plus petit nombre vérifiant $4^h \equiv 1 \pmod{m}$ impair), un au moins des h multiples A, 2A, ..., 2^{h-1}A *a pour reste* (mod$m$) *un biquaternion de norme inférieure à* $\frac{8}{9}m^2$. Le moindre reste de A (mod$m$) a une norme inférieure à $\frac{8}{9}m^2$.

En particulier si s composantes de A sont nulles, la borne supérieure $\frac{8}{9}m^2$ s'abaisse à $\frac{8-s}{9}m^2$. Ainsi *pour les quaternions, au moins un des h multiples donne un reste de norme inférieure à* $\frac{4}{9}m^2$.

25. *Étude des diviseurs de norme* 2. — Le facteur 2 jouit de propriétés spéciales, celle-ci d'abord :

Tout diviseur à droite de norme 2 *est un diviseur à gauche, et inversement.*

En effet si P est un diviseur de A, à droite, de norme 2, il vérifie

$$A\overline{P} \equiv \overline{A}P \equiv \overline{P}A \equiv 0 \pmod{2},$$

et est aussi un diviseur à gauche.

Considérons un biquaternion A de norme paire. Son moindre reste R (mod 2) a une norme au plus égale à 4. Plusieurs cas se présentent.

1° Si R est nul, les huit composantes de A sont de même parité. A appartient à la classe nulle (mod2) et est divisible par tous les biquaternions P de norme 2; ceux-ci sont au nombre de 16.7.

2° Si la norme de R vaut 2, deux ou six composantes de A sont impaires. A et R sont divisibles à droite et à gauche par les mêmes biquaternions de norme 2, qui sont les 16 biquaternions associés RJ.

3° Si la norme de R vaut 4, c'est que A contient quatre composantes impaires.

Considérons, par exemple, les quatre premières ou dernières composantes impaires :

$$R = \pm 1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3 \quad \text{ou} \quad R = \pm i_4 \pm i_5 \pm i_6 \pm i_7.$$

Pour que le biquaternion P de norme 2 soit un diviseur de R, il faut et il suffit que $R\overline{P}$ soit divisible par 2, c'est-à-dire que les deux composantes unitaires de P soient en même temps dans les quatre premiers rangs ou dans les quatre derniers. R est alors divisible par 16.3 biquaternions P formant trois groupes de diviseurs associés.

Comme deuxième exemple, prenons

$$R = \pm 1 \pm i_2 \pm i_5 \pm i_7 \qquad \text{ou} \qquad R = \pm i_1 \pm i_3 \pm i_4 \pm i_6.$$

R est divisible par P à condition que les deux composantes unitaires de P soient en même temps dans les premier, troisième, sixième, huitième rangs, ou en même temps dans les quatre autres rangs. R admet 16.3 diviseurs de norme 2, plus exactement trois groupes de diviseurs associés.

Le même raisonnement s'applique aux biquaternions R, et aux complémentaires, dont les trois composantes unitaires autres que la première forment l'une des triades du n° 20. Ces biquaternions sont au nombre de 16.14.

Tous les autres biquaternions R, au nombre de 16.70, sont *indécomposables*, c'est-à-dire n'admettent aucun diviseur de norme 2.

Vérifions-le en dénombrant les produits de la forme

$$PP' = A, \qquad N(P) = N(P') = 2.$$

Aux 16 biquaternions A divisibles par 2 et aux 16.14 biquaternions A relatifs aux triades correspondent respectivement

$$16.7.16 = 16^2.7, \qquad 16.3.16.14 = 16^2.42.$$

décompositions PP'. Tous les produits possibles PP' ont été considérés puisque leur nombre total vaut $16^2.7^2$. Il n'y a donc pas de décomposition en dehors des précédentes.

26. *Décomposition en facteurs.* — Nous avons établi pour les quaternions (n^{os} 8 et 9) deux procédés de décomposition en produit de facteurs. Seul le second procédé peut être étendu aux biquaternions, car il n'exige pas l'associativité du produit; en outre, il est valable pour des facteurs quelconques, premiers ou non.

Supposons la norme de A égale à qq_1 et formons un *moindre reste* R_1 de $\overline{A}$ suivant le module q_1. La norme de R_1 est un multiple de q_1 au plus égal à q_1^2

$$R_1 \equiv u_1\overline{A} + \frac{q_1}{2}K \pmod{q_1}, \qquad N(R_1) = q_1q_2,$$

$$q_2 = u_1^2 q + \text{partie scalaire } (u_1KA) + \frac{q_1}{4}N(K), \qquad 0 \leq q_2 \leq q_1,$$

u_1 et K ayant la même signification qu'au n° 24. La recherche des diviseurs de A à gauche de norme q équivaut à la recherche des diviseurs à droite de norme q_1, eux-mêmes conjugués des diviseurs à gauche de R_1.

Renouvelons l'opération en considérant le moindre reste R_2 de $\overline{R}_1$ suivant le module q_2. Et ainsi de suite, jusqu'à

$$R_h \equiv u_h \overline{R}_{h-1} + \frac{q_h}{2} K \pmod{q_h}, \qquad N(R_h) = q_h q_{h+1}, \qquad 0 \leqq q_{h+1} \leqq q_h.$$

Il suffit en définitive d'étudier les diviseurs de R_h à gauche de norme q_h.

Nous supposons que pour la première fois q_{h+1} est égal à l'une de ses limites, ce qui correspond à (n° 24)

$$R_h = \frac{q_h}{2} C, \qquad q_{h+1} = 0 \text{ ou } q_h,$$

C étant nul ou primitif de norme 4.

D'une manière générale, écrivons

$$R_i = \frac{m}{2} C_i, \qquad q_{i+1} \equiv q_i \equiv 0 \pmod{m},$$

la norme de C_i étant multiple de 4, et montrons que ces conditions s'étendent aux indices supérieurs et inférieurs :

$$R_{i+1} = u_{i+1} \overline{R}_i + \frac{q_{i+1}}{2}(K + 2X) = \frac{m}{2} C_{i+1},$$

$$R_{i-1} = u'_i \overline{R}_i + \frac{q_i}{2}(K + 2Y) = \frac{m}{2} C_{i-1} \qquad (u_i u'_i \equiv 1 ; \bmod q_i),$$

$$q_{i+2} = u_{i+1}^2 q_i + \text{partie scalaire}\left(m u_{i+1} \frac{KC_i}{2} + m u_{i+1} X C_i\right) + \frac{q_{i+1}}{4} N(K + 2X) \equiv 0 \pmod{m},$$

$$q_{i-1} = u_i'^2 q_{i+1} + \text{partie scalaire}\left(m u'_i \frac{KC_i}{2} + m u'_i Y C_i\right) + \frac{q_i}{4} N(K + 2Y) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Les normes de $K + 2X$, $K + 2Y$ et C_i sont en effet multiples de 4 et le produit KC_i est divisible par 2.

Ceci posé, le dernier reste est de la forme

$$R_h = \frac{m}{2} C, \qquad m = q_h, \qquad N(C) = 0 \text{ ou } 4,$$

et le scalaire m divise à la fois $2R_h$, q_{h+1}, q_h. En raisonnant de proche en proche sur $R_{h-1}, \ldots, R_2, R_1, A$, dans les deux sens, nous voyons que m divise à la fois $2A$, q et q_1, et qu'il est le plus grand nombre tel.

En outre, si m est impair, tous les biquaternions C_i sont divisibles par 2, notamment le premier qui est $\frac{2A}{m}$, et le dernier C qui est nul. Si m est pair, tous les C_i appartiennent à la même classe suivant le module 2, comme le montre l'expression de R_{i+1}. Dans les deux cas on peut dire que C est le moindre reste de $\frac{2A}{m}$ suivant le module 2.

Le problème est alors ramené à la recherche des biquaternions de norme m, diviseurs à gauche de $\frac{m}{2} C$. Examinons les cas possibles.

Premier cas. — Le dernier reste est nul, $C = o$. Il est divisible par tous les biquaternions de norme m. Le nombre des décompositions de A en produit de facteurs de normes q, q_1 est donc égal au nombre des biquaternions de norme m. Tous les restes R_i sont eux-mêmes décomposables sous la forme

$$A = QQ_1, \qquad R_1 = \overline{Q}_1 Q_2, \qquad \ldots, \qquad R_{h-1} = \overline{Q}_{h-1} M,$$

où M est un biquaternion quelconque de norme m. L'élimination des Q_i donne l'expression du facteur Q_1,

$$q_2 \ldots q_{h-1} q_h Q_1 = M \overline{R}_{h-1} \overline{R}_{h-2} \ldots \overline{R}_2 \overline{R}_1.$$

d'où l'on tire l'expression de Q.

Deuxième cas. — Si C n'est pas nul, il est primitif de norme 4. Le dernier reste R_h a quatre composantes nulles et les quatre autres égales à $\pm \frac{m}{2}$. Le scalaire m est pair. Les diviseurs à gauche de R_h, dont la norme égale m, vérifient nécessairement

$$\overline{M} R_h \equiv o \pmod{m}, \qquad \overline{M} C \equiv o \pmod{2}.$$

Examinons deux nouveaux cas.

a. Si $\frac{m}{2}$ est impair, le reste de $M \pmod 2$ est un biquaternion P de norme 2. Pour que $\overline{P}C$ soit divisible par 2, il faut et il suffit que M et C aient un diviseur commun de norme 2.

Si C est indécomposable, il en est de même de R_h et de A.

Si C est décomposable, il est divisible (n° 25) par trois biquaternions P non associés, lesquels divisent M. En multipliant tous les biquaternions de norme $\frac{m}{2}$ par ces trois biquaternions P, on obtient sans répétition tous les M : il y a alors trois fois plus de décompositions pour A que de biquaternions de norme $\frac{m}{2}$.

b. Si $\frac{m}{2}$ est pair, il existe des biquaternions M divisibles par 2, et ceux-ci rendent divisible le produit $\overline{M}C$. La décomposition est donc possible. Le nombre des solutions se calcule moins aisément; notons seulement qu'il surpasse le nombre des biquaternions de norme $\frac{m}{4}$.

La formule donnant Q_1 est encore valable, à condition que M soit remplacé par les biquaternions appropriés.

Résumons les résultats obtenus.

27. Théorème. — *Soit un biquaternion* A *de norme* qq_1 *que l'on cherche à décomposer en produit de facteurs* $N = QQ_1$ *de normes respectives* q *et* q_1. *Soit* m *le plus grand nombre scalaire qui divise à la fois* 2A, q *et* q_1.

Le moindre reste C *de* $\frac{2A}{m}$ (mod 2) *a pour norme* 0 *ou* 4.

Si C *est nul,* A *est décomposable en autant de produits qu'il y a de biquaternions de norme m. Les facteurs* Q *et* Q_1 *calculables par l'algorithme du* n° 26, *sont de la forme*

$$lQ_1 = MS_1S_2\ldots S_x, \qquad lq_1\overline{Q} = MS_1S_2\ldots S_x\overline{A},$$

l étant un entier scalaire, M *un biquaternion quelconque de norme m, et* S_1, S_2, ..., S_x *certains biquaternions de normes croissantes.*

Si la norme de C *vaut* 4, A *est décomposable d'autant de manières qu'il y a de biquaternions* M *de norme m rendant le produit* MC *divisible par* 2. *Alors,* M *vérifiant cette condition, les facteurs* Q *et* Q_1 *ont la forme indiquée pour* C *nul.*

Le biquaternion A *ne peut être décomposé en facteurs de normes q et* q_1 *dans le seul cas où m est le double d'un nombre impair,* C *étant un biquaternion indécomposable de norme* 4.

Corollaires. — 1° Si q et q_1 sont premiers entre eux, tout biquaternion A de norme qq_1 est décomposable en produit $A = QQ_1$ de 16 manières.

2° La norme d'un biquaternion quelconque A étant décomposée en produit de h puissances de nombres premiers distincts, le biquaternion A peut être décomposé en produit correspondant de 16^{h-1} manières

$$N(A) = q_1q_2\ldots q_h, \qquad A = Q_1Q_2\ldots Q_h.$$

3° La norme d'un biquaternion A primitif, supposée non divisible par 4, étant décomposée en produit de k facteurs premiers non nécessairement distincts rangés dans un certain ordre, le biquaternion A peut être décomposé en produit de 16^{k-1} manières

$$N(A) = p_1p_2\ldots p_k, \qquad A = P_1P_2\ldots P_k.$$

4° Les seuls biquaternions *indécomposables* en produit de facteurs (dont aucun n'est unitaire) sont :

les biquaternions premiers, dont la norme est un nombre premier,

les biquaternions primitifs ayant pour norme une puissance de 2, et pour reste (mod 2) un biquaternion indécomposable de norme 4.

Exemple :

$$A = [7, 6, 5, 3, 2, 2, 1, 0].$$

5° Soit A un biquaternion de norme qq_1 indécomposable en facteurs de normes q et q_1. En permutant deux composantes convenablement choisies, on obtient un biquaternion décomposable.

Ainsi

$$A = [7, 6, 3, 5, 2, 2, 1, 0]$$

est décomposable en deux facteurs de normes quelconques ayant 128 pour produit.

28. *Ensemble des multiples d'un biquaternion premier.* — Étant donné un biquaternion premier P de norme p, l'ensemble de ses multiples

$$PX \qquad \text{(X biquaternion entier quelconque)}$$

ne constitue plus un idéal : il n'est pas conservé par multiplication à droite par un biquaternion. Cet ensemble est formé de classes suivant le module p :

$$uPX + pX_1 = P(uX + \overline{P}X_1).$$

Nous allons montrer que, parmi les multiples d'un biquaternion premier P, se trouve un biquaternion simple, ou *réduit*, dont la partie scalaire vaut 1 et dont trois composantes sont nulles. D'une manière plus précise :

Tout biquaternion premier est diviseur à gauche d'un biquaternion réduit de l'une des formes

$$1 + x_1 i_1, \quad 1 + x_2 i_2 + x_3 i_3, \quad 1 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7,$$

les deux premières formes étant, si l'on veut, des quaternions réduits.

Prenons d'abord le cas particulier d'un biquaternion premier ayant ses quatre dernières ou ses quatre premières composantes nulles :

$$P = [P, o], \qquad P' = [o, \overline{P}].$$

Le quaternion P est diviseur à gauche d'un quaternion réduit U. Il en résulte que P et P′ sont diviseurs à gauche des deux biquaternions réduits conjugués

$$U = PQ, \qquad \overline{U} = P'[o, -Q].$$

Pour le cas général nous posons

$$P = [A, B], \qquad N(P) = p.$$

La norme de A, inférieure à p, première avec p, a pour inverse un entier a', suivant le module p. Écrivons

$$a' P \overline{A} = [a' A \overline{A}, a' B A] \equiv [1, a' B A] \pmod{p}.$$

Ce dernier biquaternion réduit admet bien P comme diviseur à gauche.

29. *Décomposition d'un biquaternion réduit.* — Considérons un biquaternion premier P, diviseur à gauche d'un biquaternion réduit U :

$$U = PQ.$$

Retrouvons P à partir de U, par l'algorithme du n° 26, en utilisant les seuls restes normaux, sans multiplicateur : c'est ici possible car l'existence des composantes nulles diminue la norme. Nous obtenons

$$R_l \equiv \overline{R}_{l-1} \pmod{q_l}, \qquad N(R_l) = q_l q_{l+1}.$$

Les restes successifs sont des biquaternions réduits de la même forme que U. Leurs normes sont décroissantes puisque

$$N(R_i) \leqq 1 + \left(\frac{q_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_i - 1}{2}\right)^2 < q_i^2; \qquad q_{i+1} < q_i$$

(sauf peut-être si q_i valait 2; mais R_i serait un biquaternion réduit de norme 4, nécessairement indécomposable, contrairement à l'hypothèse faite sur U). La dernière norme non nulle q_h est donc obligatoirement égale à 1.

Le diviseur à gauche P prend finalement la forme

$$qq_1 \dots q_{h-1}\overline{P} = J\overline{R}_{h-1} \dots \overline{R}_1 \overline{R}_0 \overline{U}.$$

L'unité J, si elle est différente de 1, a pour double le carré du biquaternion réduit $1 + J$. Le second membre de l'égalité devient un produit de biquaternions réduits.

En remarquant que le calcul peut se faire pour $\overline{P}$ comme pour P, et que, d'autre part, tout biquaternion est en général un produit de biquaternions premiers, nous aboutissons au résultat :

Tout biquaternion premier P *est décomposable en produit de biquaternions réduits, à un coefficient scalaire l près,*

$$lP = U_1 U_2 U_3 \dots.$$

Tout biquaternion A, de norme non divisible par 4, est décomposable en produits composés de biquaternions réduits, à un coefficient scalaire près,

$$lA = (U_1 U_2 U_3 \dots)(U_4 U_5 \dots) \dots.$$

30. *Unicité des biquaternions réduits.* — 1° Montrons que *le biquaternion réduit d'un même ensemble de multiples* PX *est unique* (à un multiple près de la norme p). Nous représentons le biquaternion P par ses quaternions composants :

$$P = [A, B], \qquad N(P) = p.$$

Supposons d'abord que l'ensemble des multiples contienne un biquaternion réduit U de l'une des deux premières formes, c'est-à-dire

$$U = [V, o] = PX_0.$$

Il en résulte

$$\overline{P}U \equiv o, \qquad \overline{A}V \equiv V\overline{B} \equiv o \pmod{p}.$$

Le quaternion V étant primitif, il faut que les normes de A et B soient divisibles par p. Le biquaternion P a donc ses quatre premières ou dernières composantes nulles

$$P = [A, o] \quad \text{ou} \quad P = [o, B].$$

Suivant le cas, V est l'unique quaternion réduit divisible à gauche par A, ou à

droite par B. Le biquaternion U est bien déterminé d'une manière unique à partir de P, à un multiple près de p

Supposons maintenant que le biquaternion réduit U soit de la troisième forme, c'est-à-dire

$$U = [1, V] = PX_0.$$

Il en résulte

$$\overline{P}U \equiv 0, \qquad A + \overline{B}V \equiv B - V\overline{A} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Aucun des quaternions A ou B n'est congru à zéro, car l'autre le serait également, ce qui est impossible. La norme de A est donc première avec p et a pour inverse un entier a'. Nous obtenons

$$a'N(A) \equiv 1, \qquad V\overline{A}A \equiv BA, \qquad V \equiv a'BA \pmod{p}.$$

L'expression de V, et celle de U, sont alors définies en fonction de P, à un multiple près de la norme p.

2° La propriété d'unicité établit une correspondance entre les biquaternions de norme p et les biquaternions réduits de norme divisible par p. A tout biquaternion réduit de l'une des trois formes, c'est-à-dire à toute solution d'une certaine congruence suivant le module p, correspondent 16 biquaternions premiers. Cependant à un biquaternion réduit de norme 4, nécessairement indécomposable, ne correspond aucun biquaternion de norme 2. D'où l'énoncé relatif aux normes impaires :

Le nombre des biquaternions de norme p premier impair vaut 16 *fois le nombre total des solutions des trois congruences indépendantes*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ces nombres de solutions résultent d'ailleurs de formules plus générales établies par V.-A. Lebesgue [9]. Étudions la première congruence en partant de la seconde :

Si $p - 1$ est multiple de 4, les congruences

$$x^2 + y^2 \equiv m, \qquad z^2 + t^2 \equiv m' \pmod{p}$$

ont chacune $p - 1$ solutions. Toutefois si m est nul, ou m', le nombre des solutions devient $2p - 1$. En faisant $m + m' = -1$, nous obtenons le nombre cherché

$$(p-2)(p-1)^2 + 2(p-1)(2p-1) = p^3 - p.$$

Si $p + 1$ est multiple de 4, nous avons respectivement comme nombres de solutions $p + 1$ et 1, au lieu de $p - 1$ et $2p - 1$. Le nombre cherché reste le même.

Le nombre total vaut dans les deux cas

$$16(p^2-p)+16(p+1)=16(p^2+1).$$

Le nombre des biquaternions de norme p premier impair est

$$r(p)=16(p^2+1).$$

31. *Nombre des biquaternions de norme n.* — Ce nombre vient d'être calculé pour n premier.

Pour n quelconque, nous suivons une méthode semblable à celle du n° 17, en recherchant d'abord les biquaternions primitifs de norme n. Nous utilisons le théorème du n° 27 et son corollaire 3°.

1° Cherchons le nombre $t(n)$ des biquaternions primitifs de norme impaire donnée n. Appelons p un diviseur premier de $n=pn_1$, et comparons $t(n)$ à $t(n_1)$.

Si p ne divise pas n_1, tout biquaternion primitif N_1 de norme n, engendre $r(p)$ biquaternions primitifs PN_1 de norme n. Inversement tout biquaternion primitif N se décompose en produit PN_1 de 16 manières. D'où

$$t(n)=\frac{r(p)}{16}t(n_1)=(p^2+1)t(n_1).$$

Si p divise n_1, tout biquaternion primitif N_1 est divisible à gauche par 16 biquaternions P_1 de norme p. Le produit PN_1 n'est primitif que si $\overline{P}$ n'est pas diviseur à gauche de N_1, c'est-à-dire si P n'est égal à aucun des 16 biquaternions $\overline{P_1}$. Inversement tout biquaternion primitif N provient ainsi de 16 biquaternions N_1. D'où

$$t(n)=\frac{r(p)-16}{16}t(n_1)=p^2t(n_1).$$

Il en résulte que *le nombre des biquaternions primitifs de norme impaire n vaut*

$$t(n)=16n^2\prod\left(1+\frac{1}{p^2}\right),$$

produit étendu à tous les diviseurs premiers de n.

2° Le nombre total des biquaternions de norme n se déduit du nombre des biquaternions primitifs par l'égalité

$$r(n)=\sum t\left(\frac{n}{\delta^2}\right),$$

somme étendue à tous les carrés δ^2 diviseurs de n. Ce nombre est, comme $t(n)$, une fonction factorable (n° 27, corollaire 2°). Si n impair est exactement divisible par p^α (p premier), le facteur correspondant de $t(n)$ vaut $p^{3\alpha}+p^{3\alpha-1}$: celui de $r(n)$ vaut donc

$$p^{3\alpha}+p^{3\alpha-1}+p^{3\alpha-2}\ldots+p^3+1,$$

qui est aussi la somme des cubes des diviseurs de p^α. Par multiplication on obtient le nombre $r(n)$, ce qui démontre le second théorème de Jacobi [3] :

Le nombre des biquaternions de norme impaire n vaut seize fois la somme des cubes des diviseurs de n.

3° Le diviseur premier $p=2$ exige une étude spéciale; la structure des biquaternions y intervient comme au n° 25.

Rappelons d'abord qu'il y a 16.7 biquaternions de norme 2.

Cherchons le nombre $t(n)$ des biquaternions primitifs de norme $n=2n_1$ à partir de $t(n_1)$. Les lettres P, P', P_1 désignent ci-après des biquaternions de norme 2.

Si n est double de nombre impair, $N=PN_1$ donne aussitôt

$$t(n)=\frac{r(2)}{16}t(n_1)=7t(n_1).$$

Si n est quadruple de nombre impair, chaque biquaternion N_1 de norme n_1 est divisible à gauche par 16 biquaternions P_1. Le produit PN_1 est primitif si P n'est égal à aucun des seize $\overline{P_1}$. Inversement tout biquaternion N primitif et décomposable provient ainsi de 16.3 biquaternions N_1. Le nombre des biquaternions primitifs N admettant un diviseur de norme 2 est donc

$$\frac{r(2)-16}{3.16}t(n_1)=2t(n_1).$$

Le nombre des biquaternions indécomposables est quadruple, c'est-à-dire vaut $8\,t(n_1)$. En effet, dans un biquaternion N ayant quatre composantes paires et quatre impaires, permutons les composantes inégales de toutes les manières possibles. Puis fixons arbitrairement le rang des composantes paires. A ce choix correspond un certain nombre de permutations (égal au nombre de permutations des composantes paires multiplié par celui des composantes impaires). A tout autre choix correspond un nombre égal de permutations. Or il y a 70 manières de choisir la parité des composantes : 14 manières conduisent à des biquaternions décomposables, 56 à des biquaternions indécomposables.

Supposons enfin n multiple de 8 et considérons tous les produits PN_1 primitifs. Désignons par $u(n)$ le nombre des biquaternions primitifs de norme n ayant quatre composantes impaires et admettant un diviseur de norme 2, par $v(n)$ le nombre des biquaternions primitifs à composantes toutes impaires :

$$t(n)=5u(n)+v(n).$$

Tout biquaternion N_1 primitif de norme n_1, ayant quatre composantes impaires et admettant un diviseur de norme 2, est divisible à gauche par 16.3 biquaternions P_1 ; il donne 16.4 produits primitifs PN_1, le biquaternion P devant être distinct de $\overline{P_1}$. Tout biquaternion N_1 primitif, sans diviseur de norme 2, multiplié par un biquaternion P quelconque, engendre 16.7 produits primitifs.

Enfin tout biquaternion N_1 à composantes impaires donne un produit divisible par 2. Inversement, tout biquaternion de norme n ayant quatre composantes impaires et admettant un diviseur de norme 2 se décompose en produit PN_1 de 16.3 manières; tout biquaternion de norme n à composantes impaires se décompose en produit de 16.7 manières. Il en résulte l'égalité

$$16.4u(n_1)+16.7.4u(n_1)=16.3u(n)+16.7v(n).$$

En particulier tout biquaternion de norme n à composantes impaires se décompose en un produit $P'N'_1$, où P' a ses deux premières composantes unitaires et les six autres nulles. Alors N'_1 doit avoir ses deux premières composantes de parités contraires, ainsi que les suivantes deux à deux; ce qui correspond à 16 manières de choisir la parité des composantes, sur un total de 70 manières. Le nombre des biquaternions N'_1, égal à $v(n)$, vaut donc

$$v(n)=5u(n_1).\frac{16}{70}.$$

Nous obtenons ainsi

$$u(n)=8u(n_1)=7v(n), \qquad t(n)=36v(n).$$

D'où l'énoncé :

Le nombre des biquaternions primitifs de norme n est égal à

$$t(n)=16hn^3\prod\left(1+\frac{1}{p^3}\right),$$

produit étendu à tous les diviseurs premiers de n, le coefficient h valant $\frac{7}{9}$ *pour n double de nombre impair, valant* $\frac{35}{36}$ *pour n quadruple de nombre impair, valant* 1 *dans tout autre cas.*

Si n est multiple de 4, *le nombre des biquaternions primitifs ayant seulement quatre composantes impaires vaut*

$$\frac{140}{9}n^3\prod\left(1+\frac{1}{p^3}\right).$$

Si n est multiple de 8, *le nombre des biquaternions primitifs à composantes toutes impaires vaut*

$$\frac{4}{9}n^3\prod\left(1+\frac{1}{p^3}\right).$$

4° Comme au 2°, dénombrons les biquaternions de norme n, primitifs ou non, en considérant les diviseurs de la forme $\frac{n}{\delta^2}$. D'une part, n supposé exactement divisible par 2^α, le facteur correspondant de $r(n)$ est, selon la parité de α,

$$8^\alpha+8^{\alpha-1}+\ldots+8^2+7.0+1 \qquad \text{ou} \qquad 8^\alpha+8^{\alpha-1}+\ldots+8^3+8^2+7.$$

c'est-à-dire dans les deux cas

$$8^x + 8^{x-1} + \ldots + 8^3 + 8^2 + 8 - 1.$$

D'autre part, le nombre des biquaternions à composantes impaires vaut la somme des cubes des diviseurs impairs de n multipliée par

$$\frac{4}{9} \cdot 8^x \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{8^x}{2};$$

il est donc égal à la demi-somme des cubes des diviseurs de n dont les diviseurs conjugués sont impairs.

D'où la conclusion :

Le nombre des biquaternions de norme n vaut 16 *fois l'excès de la somme des cubes des diviseurs pairs de n sur la somme des cubes des diviseurs impairs.*

La norme n supposée multiple de 4, *le nombre des biquaternions ayant seulement quatre composantes impaires est égal à* $\frac{35}{2}$ *fois la somme des cubes des diviseurs de n dont les conjugués sont impairs.*

La norme n supposée multiple de 8, *le nombre des biquaternions à composantes toutes impaires est égal à la demi-somme des cubes des diviseurs de n dont les conjugués sont impairs.*

32. *Note sur les biquaternions à composantes positives distinctes.* — Le calcul donne les résultats suivants concernant les normes :

Tous les nombres entiers naturels, à l'exception de

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 18, 21,

sont représentables par une somme de huit carrés positifs; ils correspondent, si l'on veut, à des biquaternions à composantes positives.

Tous les nombres entiers suffisamment grands sont représentables par une somme de huit carrés positifs distincts. Les nombres naturels qui ne peuvent être représentés de cette manière sont au nombre de 305, dont les plus grands sont 406, 418, 462.

Tous les nombres naturels sont des sommes de huit carrés premiers entre eux dans leur ensemble et correspondent ainsi à des biquaternions primitifs.

La suite des nombres représentables par une somme de huit carrés positifs distincts est identique à la suite des nombres représentables par une somme de huit carrés positifs distincts premiers entre eux dans leur ensemble. Tous les nombres naturels, excepté 305 nombres, peuvent être considérés comme des normes de biquaternions primitifs à composantes positives distinctes.

LES ENSEMBLES SURCONVEXES PLANS

PAR M. E. BLANC.

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire de 1921 (1) consacré à l'étude des courbes orbiformes, H. Lebesgue décrit sans trop de détails un processus destiné à « compléter » (2) un ensemble par l'adjonction de « lentilles » appropriées. Peut-être faut-il voir là une première et très fugitive apparition de l'idée de surconvexité.

En 1935, M. Anton Mayer (3) utilise, lui aussi, dans un Mémoire sur les orbiformes, une propriété qu'ils possèdent (sans qu'elle leur soit caractéristique), celle, pour un orbiforme de largeur d, de contenir en même temps que deux de ses points, deux arcs de cercle de rayon d qui passent par ces points. Ayant porté son attention sur cette propriété, l'ayant en quelque sorte isolée et étudiée pour elle-même, M. Mayer la généralise par l'intervention d'une métrique de Minkowski et par le remplacement des arcs de rayon d par des arcs de la courbe étalon de cette métrique; cette propriété ainsi étendue constitue dans un Mémoire légèrement ultérieur du même auteur (4), la définition de la surconvexité (*Überkonvexität*).

Presque simultanément, M. Bückner, toujours à propos des orbiformes (5), était amené à définir la notion de « corps arrondi (*abgerundet*) à l'index d ».

(1) H. LEBESGUE, *Sur quelques questions de minimum*, etc. (*Journal de Mathématiques*, t. 4, 1921, p. 67-96).

(2) Un ensemble *complet* est un ensemble auquel on ne peut adjoindre aucun point sans que son diamètre en soit augmenté. Cette définition est due à MEISSNER [*Über Punktmengen konstanter Breite* (*Vjschr. Naturf. Ges. Zürich*; t. 56, 1911, p. 42-50)]. Les ensembles complets sont identiques aux orbiformes.

(3) A. MAYER, *Der Inhalt der Gleichdicke* (*Math. Ann.*, t. 110, 1935, p. 97-127).

(4) A. MAYER, *Eine Überkonvexität* (*Math. Zeit.*, t. 39, 1935, p. 511-531). Nous désignerons ce mémoire par la lettre **U**.

(5) H. BÜCKNER, *Über Fläche von fester Breite* (*Jahr. Deut. Math. Ver.*, t. 46, 1936, p. 96-139). Ce Mémoire sera désigné par la lettre **B**.

Ses recherches étaient faites à un tout autre point de vue que celles de M. Mayer et indépendamment des travaux de celui-ci; ses définitions sont relatives à la métrique euclidienne; mais il n'en reste pas moins que le corps arrondi de M. Bückner coïncide dans cette métrique avec le corps surconvexe de M. Mayer.

Il ne faut pas trop s'étonner de voir la surconvexité apparaître à propos de l'étude des orbiformes. Elle est dans la nature de la question car tout orbiforme la possède comme nous l'avons dit plus haut. Cette notion pouvait cependant s'introduire aussi dans l'étude du parallélisme et M. Nicolesco (1) ne semble pas avoir été très loin de la pressentir. Enfin les ensembles surconvexes-R sont, comme nous le verrons, susceptibles d'une autre définition; *intersection* (2) *d'une famille finie ou infinie de sphères de rayon* R; il pouvait donc paraître naturel à qui s'occupait des propriétés des *réunions* de telles sphères (3), de chercher à étudier aussi les intersections et d'arriver ainsi à la notion de surconvexité. C'est ainsi que j'ai été amené en 1938 à définir la surconvexité indépendamment des recherches faites par les auteurs que je viens de citer. De cette époque date la rédaction du premier Chapitre du présent Mémoire et quelques-uns des résultats du second et du quatrième. Ce n'est qu'en 1939 que j'ai eu connaissance des travaux de Mayer, de Bückner et des autres auteurs dont je viens de parler. Le premier Chapitre était à cette époque déjà rédigé dans sa forme actuelle; bien qu'il contienne peu de résultats nouveaux, j'ai cru possible et intéressant de le conserver, d'abord à cause d'une différence essentielle dans la définition donnée, à cause ensuite de certains principes de raisonnement qui ne se trouvent pas dans les Mémoires cités, enfin pour l'importance que j'y donne à la définition des ensembles surconvexes comme intersections de familles de cercles : cette définition citée comme simple propriété par Bückner et passée sous silence par Mayer est en effet celle qui peut se prêter à une extension aux espaces simplement métriques.

En 1938 paraissaient deux travaux inspirés par les définitions de Mayer (il ne semble pas que les auteurs aient eu connaissance du Mémoire de Bückner). Le premier de ces travaux est la dissertation inaugurale d'un élève de M. Van der Corput, M. Buter (4); le deuxième est un article de M. Van der Corput (5) lui-même.

---

(1) Miron Nicolesco, *Sur quelques points de géométrie finie directe* (*Bull. Class. Sciences Ac. Roy. Belg.*, 1933, fasc. 7, p. 738-754). Ce mémoire sera désigné par la lettre **N**.

(2) Au sens de la théorie des ensembles.

(3) E. Blanc, *Les espaces métriques quasi-convexes*. (*Thèse*, Paris, 1938). Ce mémoire sera désigné par **EM**.

(4) A. Buter, *Hyperconvexe Punktverzamelingen* (*Dissertation*, Gröningen, 1938) en hollandais avec résumé allemand, désigné par la lettre **H**.

(5) Van der Corput, *Überkonvexe Mengen in der Ebene* (*Proc. Kon. Ned. Ac. Wetens*, vol. XLI, 1938, p. 946-955), désigné par la lettre **V**.

Le Mémoire de M. Buter approfondit dans le détail certains points des recherches de Mayer. Il apporte une nouveauté importante : la notion *d'enveloppante surconvexe*-R (¹) d'un ensemble E définie comme intersection de tous les ensembles surconvexes-R qui contiennent E. Les derniers théorèmes de ce travail énoncent des résultats intéressants sur l'enveloppante surconvexe d'un système de n points. Malheureusement, leur démonstration n'est pas entièrement rigoureuse, ce qui n'enlève rien à leur exactitude.

Le Mémoire de M. Van der Corput est consacré à l'édification axiomatique de la notion plus générale et plus abstraite de surconvexité sur un ensemble donné du plan. L'auteur, contrairement à ses devanciers, emploie non des « arcs unitaires », mais des « lentilles » pour établir sa définition.

Pour en finir avec ces indications bibliographiques, je dois enfin citer un Mémoire de M. Vincensini (²) où celui-ci, s'appuyant sur la définition de Mayer, établit d'abord un critère de surconvexité basé sur la courbure, et étudie ensuite la surconvexité pour les séries linéaires d'ensembles.

La surconvexité n'a pas, à ma connaissance, suscité d'autres recherches jusqu'ici.

Après le premier Chapitre consacré à la définition de la surconvexité et à la caractérisation des ensembles surconvexes, le second chapitre du présent Mémoire contient l'étude des ensembles-adjoints, et de la correspondance entre les points de leurs frontières. Cette étude me conduit à celle du front-R d'un ensemble puis à celle de l'enveloppante surconvexe définie comme adjoint de l'adjoint. Il m'a été commode dans cette étude de nommer *classe* d'un ensemble le rayon de son cercle circonscrit. Cette notion de classe d'un ensemble paraît avoir une grande importance dans la théorie de la surconvexité. Les notions d'adjoint et de front-R sont dues à M. Nicolesco, celle d'enveloppante est due, nous l'avons vu, à M. Buter; on ne s'étonnera pas de retrouver ici quelques résultats de ces auteurs, mais la plupart des résultats contenus dans cet important Chapitre sont entièrement nouveaux.

Le Chapitre III est consacré tout entier à la démonstration du théorème suivant : *Tout continu d'ordre deux relativement à la famille des droites et des cercles de rayon supérieur à* R, *est soit la frontière d'un ensemble surconvexe*-R, *soit un arc d'une telle frontière*. Ce théorème généralise certains résultats de M. André Marchaud relatifs aux continus d'ordre deux.

(¹) H, p. 45.

(²) Paul Vincensini. *Sur les figures superconvexes planes* (*Bull. Soc. Math.*, 1936, p. 197-208).

CHAPITRE I.

DÉFINITION ET CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES SURCONVEXES.

Définition.

1. Étant donnés dans le plan deux points A et B distants au plus de $2R$, considérons la « lentille fermée de rayon R définie par ces deux points », c'est-à-dire l'ensemble des points communs aux deux cercles fermés (¹) de rayon R qui passent par A et B. Cet ensemble fermé, que nous désignerons dans tout ce qui suit par $L(A, B; R)$, a pour frontière les deux arcs de cercles de rayon R, de mesures inférieures ou égales à π, limités par A et B. Ces deux arcs n'ont d'ailleurs pour mesure π que si $AB = 2R$; dans ce cas $L(A, B; R)$ se confond avec le cercle fermé de diamètre AB.

Soit maintenant un ensemble *fermé* E quelconque et ne *contenant pas tout le plan* (²).

Nous dirons qu'il est *surconvexe pour le rayon* R (en abrégé scvR) *si, étant donné dans* E *un couple de points quelconque* A, B, *lorsque la distance* AB *est au plus égale à* $2R$, *la lentille* $L(A, B; R)$ *est contenue dans* E (³).

Un ensemble constitué par un point unique sera, d'après cette définition, considéré comme surconvexe pour n'importe quelle valeur de R.

Tout cercle fermé de rayon R, toute lentille de rayon R sont des ensembles scvR.

Cette définition n'impose aucune condition aux couples de points dont la distance est supérieure à $2R$. Rien ne s'oppose donc à ce qu'un ensemble scvR soit formé de plusieurs composants séparément scvR et tels que la plus petite distance de l'un à l'autre soit supérieure à $2R$. Il n'existera aucun autre lien obligatoire entre deux de ces composants. *On pourra donc borner l'étude des ensembles* scvR *à ceux d'entre eux qui sont connexes.*

Nous établirons par la suite qu'un tel ensemble est toujours de diamètre inférieur à $2R$.

(¹) Un cercle fermé de centre A et de rayon R est l'ensemble $C(A, R)$ des points M tels que $AM \leq R$; le cercle ouvert $C(A, R)$ est l'ensemble des points M tels que $AM < R$.

(²) Nous préférons ne pas avoir à considérer comme scvR un ensemble contenant tout le plan. L'intérêt de la surconvexité réside en effet en des propriétés de frontières qui ne sauraient se poser pour un tel ensemble.

(³) Cette définition offre avec celles de Mayer et Bückner les différences suivantes :

1° Ces auteurs supposent qu'aucun couple A, B de E n'a une distance supérieure à $2R$.

2° Ils exigent que les deux arcs de cercle qui limitent la lentille (et non pas la lentille elle-même) appartiennent à E. Alors que la première de ces différences est essentielle, la seconde est de peu d'importance.

THÉORÈME I. — *L'intersection (partie commune) d'une famille finie ou infinie d'ensembles* scvR *est encore un ensemble* scvR *à moins qu'elle ne soit vide.*

Si cette partie commune ne contient qu'un seul point la chose est évidente. Si elle contient deux points A et B, chacun des ensembles de la famille considérée contient $L(A, B; \overline{R})$ et cette lentille appartient donc à leur intersection.

COROLLAIRE. — *L'intersection d'une famille finie ou infinie de cercles fermés de rayon* R *est un ensemble* scvR. *Cet ensemble est évidemment connexe.*

Le but essentiel du présent Chapitre sera d'établir la réciproque suivante de ce corollaire :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Tout ensemble* scvR *connexe* (¹) *est l'intersection d'une famille de cercles fermés de rayon* R.

Nous aurons pour cela à établir un certain nombre de théorèmes préliminaires concernant les ensembles surconvexes et leurs frontières.

THÉORÈME II. — *Tout ensemble* scvR E, *connexe ou non, de diamètre inférieur à* 2R, *est en même temps* scvR′ *si* $R' \geq R$.

Soit en effet un couple A, B extrait de E; puisque AB est inférieur à 2R et *a fortiori* à 2R′, les lentilles $L(A, B; \overline{R})$ et $L(A, B; \overline{R'})$ existent et l'on a évidemment :

$$L(A, B; \overline{R}) \supset L(A, B; \overline{R'});$$

la première des deux est contenue dans E en vertu de l'hypothèse : la seconde l'est donc aussi, ce qui justifie la conclusion.

Remarque. — L'hypothèse faite sur le diamètre de E est nécessaire pour que E ne contienne aucun couple dont la distance soit intermédiaire entre 2R et 2R′; pour un tel couple $L(A, B; \overline{R})$ n'existerait pas et le raisonnement ne pourrait se poursuivre.

THÉORÈME III. — *Tout ensemble* scvR E *de diamètre inférieur à* 2R *est en même temps convexe (et par conséquent connexe).*

Le segment AB est en effet contenu quel que soit R dans la lentille $L(A, B; \overline{R})$ et l'hypothèse faite sur le diamètre entraîne comme plus haut l'existence de cette lentille.

On peut remarquer que ce théorème rentre dans le précédent si l'on considère le segment AB comme la lentille $L(A, B; \infty)$.

(¹) L'hypothèse de connexité joue ici et dans ce qui va suivre un rôle capital. Elle se substituera à celle de limitation du diamètre. En d'autres termes, il y a identité entre les ensembles scvR *connexes* et les ensembles « arrondis à l'index R » de M. Bückner.

La définition de la convexité apparaît ainsi comme le cas limite pour R infini de la définition de la surconvexité R.

Frontière d'un ensemble scvR [1].

2. *La frontière* F *d'un ensemble* scvR E *de diamètre inférieur à* 2R *est un continu de Jordan fermé, sans point multiple; en chaque point de cette frontière existent deux demi-tangentes qui sont d'ailleurs opposées sauf en une infinité dénombrable de sommets. Par chaque point de cette frontière passe en outre une droite d'appui de l'ensemble; en un point où la tangente existe, cette droite d'appui se confond avec elle; en un sommet il y a une infinité de droites d'appui remplissant tout l'angle compris entre les supports des demi-tangentes.*

Ce sont là en effet des propriétés appartenant aux frontières d'ensembles convexes.

Remarque. — Toutes celles de ces propriétés qui sont locales resteront valables même si l'on ne limite plus le diamètre à 2R. On pourrait en effet dans ce cas remplacer E par son intersection E′ avec le cercle de rayon $R_1 < R$ ayant pour centre le point de la frontière au voisinage duquel on veut l'étudier. On sait (Th. I) que ce nouvel ensemble est aussi scvR.

3. Théorème IV. — *Étant donnés trois points* A, B, C *de la frontière* F *d'un ensemble scv*R E [2], *si le diamètre de l'ensemble* (A, B, C) *n'excède pas* $R\sqrt{3}$, *le rayon du cercle qui passe par ces trois points n'excède pas* R.

Considérons en effet trois points A, B, C appartenant à F et tels que leurs distances mutuelles n'excèdent pas $R\sqrt{3}$; *a fortiori* seront-elles inférieures à 2R et les trois lentilles : $L(A, B; \overline{R})$, $L(B, C; \overline{R})$, $L(C, A; \overline{R})$ existeront. De plus, le point C par exemple devra être extérieur à $L(A, B; \overline{R})$ ou sur sa frontière, sinon l'ensemble E étant scvR, C en serait un point intérieur. Il en sera de même pour A et B relativement à $L(B, C; \overline{R})$ et à $L(C, A; \overline{R})$.

Soient alors a, b, c, r respectivement les trois côtés du triangle ABC et le rayon de son cercle circonscrit. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $a \geq b \geq c$. Trois cas sont possibles :

1° *Les trois angles sont aigus.* — A est au moins égal à $\frac{\pi}{3}$, et l'on a

$$r = \frac{a}{2 \sin A} \leq \frac{a}{\sqrt{3}} < R.$$

---

(1) Tout ce qui suit n'aurait aucun sens si la frontière n'existait pas, c'est-à-dire, si l'ensemble contenait tout le plan. Ceci explique la restriction faite à ce sujet au paragraphe 1.

(2) Aucune restriction n'étant plus apportée au diamètre de l'ensemble E.

2° *L'angle* A *est obtus.* — Le point A doit alors se trouver à la fois à l'intérieur du cercle de diamètre BC $= a$ et à l'intérieur ou sur la frontière de $L(B, C; \overline{R})$. Ceci n'est possible que si

$$\frac{a}{2} < r \leqq R.$$

3° A *est droit.* — Le même raisonnement donne

$$\frac{a}{2} = r \leqq R.$$

Ainsi dans tous les cas, r est au plus égal à R. C. Q. F. D.

4. Si l'on fait maintenant tendre vers un même point M les trois points A, B, C, le diamètre de l'ensemble ABC tend vers o et le théorème précédent devient applicable pourvu que A, B, C soient assez voisins de M. La plus grande limite de r(A, B, C) lorsque A, B, C tendent vers M sera donc au plus égale à R. En d'autres termes :

Théorème V. — *La courbure inférieure au sens de M. Menger*(1) *de la frontière d'un ensemble* scvR *en un de ses points est supérieure ou égale à* $\frac{1}{R}$.

5. Nous continuerons maintenant à étudier les propriétés de la frontière au voisinage d'un de ses points M en remplaçant l'ensemble E par l'ensemble E′ intersection de E et du cercle de centre M et de rayon $R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ceci ne change rien aux propriétés que l'on veut étudier et le nouvel ensemble est à la fois scvR et convexe (*voir* remarque du paragraphe 2).

Considérons deux points P et Q de la frontière F′ de E′. On a

$$r(M, P, Q) \leqq R.$$

Faisons tendre P vers M, Q restant fixe : MP tend vers l'une des demi-tangentes à F′ en M, soit MT; le cercle MPQ tend vers le cercle γ passant par Q et tangent en M à MT. Le rayon ρ de γ est donc au plus égal à R.

Si l'on considère alors le cercle C_M de rayon R, tangent en M à MT et situé

(1) Menger, *Über allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung* (*Math. Ann.*, t. 103, p. 480).

Le théorème reste bien entendu valable pour une courbure entendue au sens de *Alt* (Dissertation-Vienne, 1932).

M. A. Mayer démontre un théorème équivalent à celui-ci, mais avec une métrique de Minkowski (U, § 6). Il va de soi que le procédé de démonstration donné ici serait difficilement généralisable à une telle métrique.

Enfin M. Vincensini (*loc. cit.*, p. 199-200) établit, en supposant que F possède en tout point une courbure continue (au sens euclidien), une relation entre la courbure de F et celle de la courbe unitaire de la métrique minkowskienne utilisée. Cette relation se réduit à celle énoncée ci-dessus dans le cas où la courbe unitaire est un cercle. La démonstration est basée sur un résultat dû à M. B. Segre. Il semble que l'on pourrait ramener l'un à l'autre les théorèmes de Mayer et de Vincensini.

du même côté que γ de MT, il résulte de ce qui précède que γ est contenu dans C_M ou au plus confondu avec lui. Le point Q étant un point quelconque de F', on voit que F' est formé de points intérieurs à C_M ou situés sur sa frontière. Il en sera de même de E' car l'existence d'un point de E' extérieur à C_M entraînerait celle d'au moins un point de F' extérieur à C_M. Nous dirons que C_M est un *cercle d'appui* de E' (1). Il peut évidemment se faire que certains points de E soient extérieurs à C_M; nous dirons donc que C_M constitue pour E un *cercle d'appui local*.

Si au point M les deux demi-tangentes sont opposées, il passe en ce point un cercle d'appui unique de rayon R. Si elles ne le sont pas, on obtient par la construction précédente pour E' deux cercles d'appui distincts; E' est donc localisé dans la lentille fermée constituée par ces deux cercles; mais alors tout cercle de même rayon passant par M et tangent à une quelconque droite d'appui issue de M, contient cette lentille, c'est donc aussi un cercle d'appui pour E'. Les centres de ces cercles forment un arc $\alpha\beta$ du cercle C(M, R), α et β étant les centres des deux cercles correspondant aux demi-tangentes. Ainsi :

THÉORÈME VI. — *Par tout point de la frontière d'un ensemble scvR, passe au moins un cercle de rayon* R, *cercle d'appui local pour cet ensemble. Par un sommet de cette frontière passent une infinité de cercles d'appui local, ayant en commun une lentille dite d'appui local* (2).

Intersection d'un ensemble scvR avec une circonférence de rayon R.

6. Soit l'ensemble scvRE et soit une circonférence C de rayon R. Si ces deux ensembles ont en commun deux points α et β, il est évident qu'ils auront aussi en commun le plus petit des deux arcs $\alpha\beta$ situés sur le cercle C; si d'autre part

(1) M. G. Bouligand appelle cercle d'appui d'un ensemble un cercle qui ne contient à *son intérieur* aucun point de l'ensemble. Il est évident que si l'on veut étendre la notion de droite d'appui au cas d'un cercle, les deux extensions par l'intérieur ou l'extérieur sont aussi plausibles l'une que l'autre. On pourrait dans le cas actuel parler de cercle d'appui enveloppant. Je ne le ferai que dans le cas où la nécessité s'en ferait sentir pour éviter toute ambiguïté.

(2) L'existence d'une courbe unitaire d'appui en tout point de la frontière d'un ensemble surconvexe est démontrée par M. A. Mayer, **U**, p. 516 et M. Buter (M. Bückner ne s'en préoccupe pas). Il s'agit pour ces auteurs de figures surconvexes à leurs sens, c'est-à-dire définies par arcs unitaires (et non par lentilles), avec une métrique de Minkowski, *le diamètre ne devant pas dépasser* 2R.

Leur résultat revient donc à l'existence d'une courbe unitaire d'appui local si l'on se libère de cette dernière restriction. Si l'on fait intervenir maintenant l'hypothèse de connexité, mes raisonnements ultérieurs restent valables pour une métrique de Minkowski. On voit donc que, même pour une telle métrique, les ensembles surconvexes définis par lentilles (au sens de M. Van der Corput ou au mien) pourvu qu'on les suppose connexes, auront un diamètre inférieur à 2R et posséderont les propriétés qui caractérisent les ensembles surconvexes fermés de Mayer.

Je dois ajouter que M. A. Mayer n'établit ses conditions de courbure qu'après avoir établi l'existence du cercle d'appui. La marche inverse que je me trouve avoir suivie paraît être difficilement utilisable dans le cas de la métrique de Minkowski.

ils ont en commun deux points diamétralement opposés de C, E contiendra les deux demi-circonférences, et s'ils ont en commun trois points α, β, γ non situés sur une même moitié de la circonférence C, E contiendra les arcs $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, c'est-à-dire la totalité de C. Il résulte de là que 4 cas seulement sont possibles (1) :

1° C ne coupe pas E,
2° C a en commun un seul point avec E,
3° C a en commun avec E un arc inférieur à une demi-circonférence,
4° C est contenu tout entier dans E.

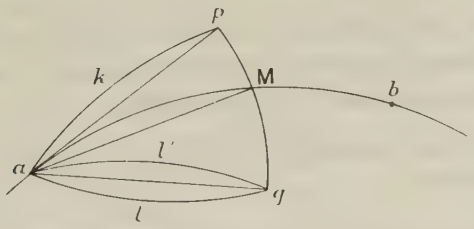
Dans le second cas le point commun unique ne peut être qu'un point frontière de E. Dans le troisième cas *ou bien l'arc commun $\alpha\beta$ est entièrement formé de points frontières de* E, *ou bien tous ses points sont des points intérieurs à l'exception de ses extrémités α et β*. Enfin, dans le quatrième cas, *ou bien tous les points de* C *sont des points frontières de* E, *ou bien ce sont tous des points intérieurs*. Ceci résulte immédiatement du théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Soient a et b deux points communs à* E *et* C, *et soit* M *un point du plus petit arc ab sur* C; *si* M *est un point intérieur de* F, *il en est de même de tous les points de ab sauf peut-être a et b.*

Nous avons, d'après les hypothèses faites

$$\overline{aM} < 2R; \quad \overline{bM} < 2R;$$

M étant supposé intérieur à E, on peut déterminer sur le cercle de centre a et de rayon aM deux points p et q situés de part et d'autre de M, assez voisins de



ce point pour que tout point de l'arc pq soit lui-même intérieur à E. En vertu de la sev R de E, la figure limitée par l'arc pq, l'arc akp (obtenu en faisant tourner $\widehat{aM}$ d'un angle égal à Map autour de a) et l'arc alq (obtenu en faisant tourner $\widehat{AM}$ d'un angle égal à Maq autour de a, puis en faisant une symétrie par rapport à aq) fait tout entière partie de l'ensemble E; il est visible que cette figure

(1) *Voir* à ce sujet pour le cas de la métrique minkowskienne Buter (**H**, th. 22 et 23).

contient à son *intérieur* tous les points de aM sauf peut-être a. On montrerait de la même façon que tous les points de bM, sauf peut-être b sont intérieurs à E. C. Q. F. D.

Caractérisation des scvR connexes.

7. Abordons maintenant la démonstration du théorème fondamental. Nous établirons pour cela un lemme :

LEMME I. — *Tout cercle d'appui local de rayon* R *d'un ensemble scv*R *connexe est un vrai cercle d'appui.*

Soient E l'ensemble considéré, M un point frontière, C_M l'un des cercles d'appui local de rayon R en M. Montrons que E ne peut avoir aucun point extérieur à C_M.

En premier lieu il ne peut exister sur la circonférence de C_M aucun point A intérieur à E. En effet, tout l'arc AM (sauf M) serait dans ce cas formé de points intérieurs à E. Il y aurait donc dans tout voisinage de M des points *intérieurs* à E situés sur C_M et par conséquent des points de E extérieurs à C_M; ce dernier ne serait plus alors un cercle d'appui local.

Supposons qu'il existe un point N de E extérieur à C_M. E étant connexe et fermé, il existera sur C au moins un point K de E limite de points de E extérieurs à C_M; K ne pouvant être un point intérieur de E, en est un point frontière; le plus petit arc MK appartient alors tout entier à la frontière de E; l'une des demi-tangentes à cette frontière en K est la demi-tangente à cet arc; le cercle C_M est donc l'un des cercles d'appui local en K, mais ceci est contradictoire avec la présence à l'extérieur de C_M et au voisinage de K de points de E (1). C. Q. F. D.

Il est évident que tout ensemble possédant des cercles d'appui est contenu dans la partie commune à ces cercles d'appui. Le théorème fondamental sera donc démontré lorsque nous aurons fait voir que :

LEMME II. — *Tout point qui n'appartient pas à* E *est extérieur à au moins un cercle d'appui de rayon* R.

Soit N un point du complémentaire de E; E étant fermé, la distance de N à E est différente de o et il existe sur E un point M tel que MN soit égal à cette distance (projection de N sur E). M est un point frontière de E; il passe en M une droite d'appui MT, et à cette droite correspond un cercle d'appui C_M; E et N

(1) Ainsi se trouve établi dès à présent que tout ensemble scvR connexe est de diamètre au plus égal à 2R. Les théorèmes II et III peuvent donc être énoncés comme suit :

THÉORÈME II-III *bis.* — *Tout ensemble scv*R *connexe est scv*R′ *si* R′ > R; *un tel ensemble est aussi convexe.*

étant de part et d'autre de ce cercle, E lui étant intérieur, X lui sera extérieur (1). C. Q. F. D.

Si l'on associe au théorème fondamental sa réciproque (corollaire du théorème I), on obtient le résultat suivant :

Il y a identité dans le plan entre les ensembles scvR *connexes et les intersections de sphères fermées de rayon* R.

Le raisonnement fait pour établir le lemme II est valable pour tout ensemble fermé tel qu'en chacun de ses points passe un cercle d'appui de rayon R.

Un tel ensemble coïncide alors avec la partie commune à tous ses cercles d'appui; il est donc scvR et connexe (th. I). Ainsi :

Théorème VIII. — *Tout ensemble fermé tel que par chacun de ses points frontières il passe un cercle d'appui de rayon* R *est un ensemble* scvR *et connexe* (2).

8. En combinant avec le théorème II-III *bis* les résultats du paragraphe 6, nous obtiendrons la généralisation suivante de certaines propriétés des ensembles convexes :

Théorème IX. — *Soit* E *un ensemble* scvR *connexe, et soit* K *une droite ou une circonférence de rayon supérieur à* R *: ou bien* K *ne coupe pas* E, *ou bien* K *n'a en commun avec* E *qu'un seul point nécessairement frontière, ou bien* K *coupe la frontière de* E *en deux points; dans ce dernier cas le segment de droite ou le plus petit arc déterminé sur* K *par ces deux points est entièrement formé de points intérieurs à* E.

On peut dire que F frontière de E est un continu d'ordre 2 relativement aux cercles de rayon supérieur à R (3). Nous reviendrons plus loin sur ce point.

9. Remarquons enfin qu'un ensemble scvR de diamètre égal à 2R *ne peut être qu'un cercle fermé de rayon* 2R.

Cet ensemble étant scv est en effet fermé; il contient donc au moins deux points A et B distants de 2R, et il contient par conséquent tout le cercle fermé de diamètre AB. Il ne peut contenir de points extérieurs à ce cercle car son diamètre deviendrait alors supérieur à 2R.

---

(1) Cette démonstration coïncide avec celle donnée par M. Bückner (**B**, § 4) pour démontrer le théorème suivant :

« Tout corps arrondi à l'index *d* est l'intersection de toutes les sphères de rayon *d* qui le contiennent ». Les hypothèses de M. Bückner diffèrent des miennes car un corps « arrondi à l'index *d* » est pour lui un corps scvR de *diamètre inférieur à* 2R. Aussi n'a-t-il pas besoin de démontrer le lemme I. Les développements des paragraphes 3 à 7 se trouvent ici nécessités par l'abandon de l'hypothèse diamétrale pour celle de connexité. M. Buter donne aussi avec la même démonstration un énoncé équivalent au lemme II.

(2) *Voir* Mayer (**U**, th. 3).

(3) *Voir* Chapitre III.

CHAPITRE II.

ENSEMBLES ADJOINTS. ENVELOPPANTES.

La construction R.

10. Définition. — Prenons un ensemble E non vide quelconque et considérons la famille des cercles fermés de rayon R centrés sur E. Si cette famille a une intersection non vide, nous désignerons par RE cette intersection, qui est nécessairement un ensemble fermé, connexe et scv_R. Si cette intersection est vide, nous conviendrons d'écrire $RE = o$. Nous désignerons par construction R l'opération ci-dessus définie qui fait passer de E à RE (1). La longueur R sera le « rayon » de la construction.

Nota. — Dans tout ce qui suit nous omettrons lorsqu'elle ne sera pas indispensable l'indication du rayon. Ainsi, lorsque nous parlerons de cercles d'appui, d'adjoints, d'enveloppantes, sans autres précisions, il s'agira toujours de cercle de rayon R, d'adjoints-R, d'enveloppantes-R (2).

11. Propriété I (P_1). — *Quels que soient* E_1 *et* E_2, *on a*

$$R(E_1 + E_2) = RE_1 . RE_2$$

ceci résulte immédiatement de la définition. Cette propriété entraîne comme corollaire la

Propriété II (P_2). — *Si l'on a* $E \subset E'$ *on a aussi* $RE \supseteq RE'$.

En particulier, il pourrait se faire que RE′ soit nul sans que RE le soit. La propriété II pour si évidente qu'elle apparaisse jouera un rôle essentiel dans les raisonnements qui vont suivre.

Propriété III (P_3). — *Quels que soient* E *et* E′, *on a*

$$R(E.E') \supseteq RE + RE'.$$

En effet, tout point de RE par exemple étant commun à tous les cercles générateurs centrés sur E, appartient *a fortiori* à tous ceux d'entre eux qui sont centrés sur E.E′.

En général l'égalité n'a pas lieu car le second membre ne représente pas forcément un ensemble scv_R. Il n'y a donc pas dualité complète entre P_1 et P_3.

---

(1) Bückner (**B**, p. 109) donne cette construction et note son résultat $\mathfrak{A}_R$ ou $\mathfrak{B}_R$ suivant qu'il opère dans le plan ou dans l'espace. Sans s'attacher à une étude détaillée de ces ensembles il en indique et utilise certaines propriétés dans le but précis de construire à partir de E un ensemble complet ayant même diamètre. Le mot d'adjoint-R est emprunté à la terminologie introduite par M. Nicolesco, dans une étude consacrée à la notion de parallélisme (**N**, p. 748).

(2) Les définitions seront données plus loin.

PROPRIÉTÉ IV (P_4). — *En désignant par* E *la fermeture de* E, *on a toujours*

$$RE = R\bar{E}.$$

D'après P_2 on a $RE \supseteq R\bar{E}$.

Prenons alors un point B de RE. Soit dans E un point A n'appartenant pas à E et soit $A_1, \ldots, A_n \ldots$ une suite de points de E admettant A comme point d'accumulation. Nous aurons $A_nB \leqq R$ quel que soit r, et par conséquent $AB \leqq R$, ce qui prouve que B appartient au cercle fermé $C(A, \bar{R})$. Comme A est quelconque dans $\bar{E}$, on voit que B appartient à $R\bar{E}$. C. Q. F. D.

Cette propriété nous permettra, lorsque ce sera nécessaire, de supposer sans diminution de la généralité que E *est fermé* puisqu'on pourra toujours le remplacer au besoin par sa fermeture.

Ensembles adjoints.

12. Nous appellerons adjoint-R de l'ensemble E, le résultat RE de la construction R.

Voici quelques exemples :

1° l'adjoint-R d'un point A est le cercle $C(A, \bar{R})$

2° *a*) l'adjoint-R d'un cercle de rayon R se réduit à son centre; *b*) l'adjoint-R d'un cercle de rayon $r < R$ est le cercle concentrique de rayon $R - r$; *c*) l'adjoint-R d'un cercle de rayon supérieur à R est vide;

3° l'adjoint-R de l'ensemble formé par deux points est la lentille commune aux cercles de rayon R centrés sur ces deux points;

4° l'adjoint-R de l'ensemble formé par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté R est le triangle de Reuleaux ayant ces trois points pour sommets.

Existence de l'adjoint. Classe d'un ensemble.

13. THÉORÈME I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *ait un adjoint-*R *non vide est qu'il soit contenu dans au moins un cercle fermé de rayon* R.

Le fait que cette condition est suffisante résulte immédiatement de l'exemple 2° *a* et de P_2. Le fait qu'elle est nécessaire est une conséquence immédiate de la définition. Tout point de RE est en effet à une distance au plus égale à R de tous les points de E: c'est donc le centre d'un cercle fermé de rayon R contenant l'ensemble E.

Notons qu'en particulier tout ensemble $\mathrm{scv}R$ admet un adjoint-R.

Étant donné un ensemble borné E, on sait qu'il existe un cercle fermé unique contenant E et de rayon minimum; c'est *le cercle circonscrit* à E. Son rayon ne peut bien entendu être nul que dans le cas où E se réduit à un point.

En dehors de ce cas le cercle circonscrit s'appuie sur la frontière de E ou bien en deux points G et H diamétralement opposés (à la fois sur le cercle et sur l'ensemble), ou bien en au moins trois points I, J, K formant un triangle acutangle (¹).

Le diamètre $2R_0$ de ce cercle est dans le premier cas égal au diamètre D de l'ensemble, dans le second cas il lui est supérieur sans toutefois dépasser la valeur $\frac{2D}{\sqrt{3}}$ (²).

Soit alors R un nombre quelconque :

1° Si $R < R_0$, l'adjoint-R de E est vide.

2° Si $R \geq R_0$, E possède un adjoint-R non vide. Si $R = R_0$, cet adjoint se réduit à un point unique : le centre du cercle circonscrit. En effet ce centre est le seul point commun soit aux deux cercles $C(G, R_0)$ et $C(H, R_0)$, soit aux trois cercles $C(I, R_0)$, $C(J, R_0)$ et $C(K, R_0)$.

Définition. — *Nous dirons qu'un ensemble dont le cercle circonscrit est de rayon* R_0 *est de la classe* R_0 (³).

Remarquons que tout ensemble de classe finie est borné et que tout ensemble borné possède, d'après ce qui précède, une classe finie et bien déterminée.

Un ensemble réduit à un point sera dit *de classe nulle*, un ensemble non borné sera dit de *classe infinie*.

Avec cette terminologie le théorème I peut se mettre sous la forme suivante :

Théorème I *bis*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *possède un adjoint* — R *non vide est qu'il soit de classe inférieure ou égale à* R.

Points opposés.

14. Théorème II. — *Si* A *appartient à* E, B *à* RE, *et si* $AB = R$, A *est point frontière de* E, B *point frontière de* RE.

Appelons M un point variable décrivant E; si A était un point intérieur à E, la distance BM ne pourrait passer en ce point par un maximum (⁴); il y aurait donc dans E des points dont la distance à B serait supérieure à R, ce qui est impossible. On verrait exactement de la même manière que B est point frontière de RE.

(¹) *Voir* par exemple T. Bonnesen. *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*. Gauthier-Villars, 1929, p. 44.

(²) L. Chamard, *Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel* (*Thèse*, Poitiers, 1933, p. 23).

(³) Cette notion n'a rien de commun avec celle que M. Lucien Chamard a introduite sous le même nom [*voir* ci-après, p. 230, note (¹)].

(⁴) Ceci correspond à ce que M. Nicolesco appelle le parallélisme de seconde sorte.

Dans ces conditions le cercle $C(A, \overline{R})$ passe par B et contient la totalité de l'ensemble RE; c'est donc un cercle d'appui de cet ensemble en B; le cercle $C(B, \overline{R})$ est pour la même raison cercle d'appui de E en A. Les tangentes AX et BX′ à ces cercles en A et B sont droites d'appui respectivement à E et RE. La droite AB est perpendiculaire à ces deux tangentes; c'est la normale commune aux deux cercles.

Définition. — *Lorsque deux points* A *et* B *satisfont aux hypothèses du théorème* II (*ce qui entraîne tous les détails de configuration qui viennent d'être décrits*), *nous dirons qu'ils sont opposés dans le couple* (E, RE) (¹).

Existence des opposés.

15. Théorème III. — *Étant donné un point* B *de la frontière de* RE, *il existe dans* F *au moins un point* A *opposé à* B.

Nous pouvons supposer E fermé. Si A n'existait pas, la distance BM aurait, lorsque M décrit E, un maximum R′ nécessairement inférieur à R; E serait alors contenu dans le cercle C(B, R′) et d'après P_2, RE contiendrait entièrement l'adjoint de ce cercle, c'est-à-dire le cercle C(B, R − R′). Alors, contrairement à l'hypothèse, B serait point intérieur de RE.

Théorème IV. — RE *est le lieu des centres des cercles fermés de rayon* R *contenant* E; *la frontière de* RE *est le lieu des centres des cercles d'appui de* E.

Il résulte en effet de tout ce qui précède que tout point de RE appartient au premier lieu, tout point de $(RE)_f$ au second; d'autre part, tout centre B d'un cercle fermé de rayon R qui contient E se trouve à une distance de tout point de E au plus égale à R; un tel point appartient donc à RE; si de plus le cercle dont il est le centre est cercle d'appui de E, il existe sur sa circonférence un point A de E; A et B sont alors opposés et B appartient à $(RE)_f$.

Théorème III *bis*. — *Étant donné un point* A *de la frontière de* E, *à tout cercle d'appui de* E *passant par* A *correspond dans* RE *un point opposé à* A *: si par* A *ne passe aucun cercle d'appui de* E, A *ne possède aucun point opposé dans* RE.

Soit en effet Γ un cercle d'appui passant par A et soit B son centre; E étant contenu dans Γ, RE contient l'adjoint de Γ, c'est-à-dire B. Comme AB = R, B est opposé à A.

Si par A passent deux cercles d'appui, il y en passe une infinité dont les centres forment un arc de cercle de centre A et de rayon R, et cet arc appartient tout entier à la frontière de RE.

(¹) Le mot « opposé » ne doit pas cependant faire croire qu'il y ait en général réciprocité entre ces deux points.

La seconde partie du théorème résulte de ce que s'il existe B opposé à A, B est centre d'un cercle s'appuyant sur E au point A.

La comparaison des théorèmes III et III *bis* prouve bien qu'il n'y a pas en général réciprocité entre les points de la frontière de E et ceux de la frontière de RE, mais l'énoncé même du théorème III *bis* nous indique immédiatement à quelle condition cette réciprocité sera réalisée.

Théorème V. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'à tout point frontière de* E *corresponde un point opposé est que* E *soit un ensemble* scvR *et connexe.*

En effet, par tout point frontière d'un tel ensemble, il passe un cercle d'appui; réciproquement, si par tout point frontière d'un ensemble fermé passe un cercle d'appui de rayon R, nous avons vu (Chap. I, § 7) que cet ensemble est scvR et connexe.

Front-R.

16. Revenant au cas général, nous sommes amenés à distinguer sur la frontière F d'un ensemble E deux sortes de points : ceux par lesquels passe au moins un cercle d'appui de E et ceux par lesquels ne passe aucun cercle d'appui de E. Les points de la première espèce constituent par définition le front-R(1), Φ_R de E; ceux de la seconde espèce constituent le complémentaire Ψ_R de Φ_R sur F. Avec ces définitions, les théorèmes III *bis* et V prennent les formes suivantes :

Théorème III *ter*. — *Tout point de* Φ_R *possède au moins un opposé, aucun point de* Ψ_R *n'en possède.*

---

(1) M. Nicolesco (**N**, p. 750) est amené par des considérations différentes à étudier cet ensemble sous le nom de front-R de seconde espèce. Il suit ainsi, en la complétant, une terminologie introduite par M. G. Bouligand (*voir* p. c., G. I. D., p. 104). Ce dernier appelle en effet front-R d'un ensemble E, la réunion de tous les points de cet ensemble par lesquels passe un « cercle d'appui » de E, c'est-à-dire [*voir* ci-dessus, p. 222, note (1)] un cercle ne contenant à son intérieur aucun point de E. On voit que la définition donnée ici ne diffère de celle de M. Bouligand que par le sens qu'il faut donner à l'expression « cercle d'appui ». Ici, comme plus haut, j'ai préféré ne pas alourdir le texte par une précision que l'absence d'ambiguïté possible rendait superflue.

D'ailleurs les deux fronts-R ainsi définis constituent en réalité deux cas différents d'une seule notion, et il serait facile d'en unifier la définition en faisant intervenir une convention de signe pour R: par exemple R négatif donnerait cercles d'appui et fronts au sens de M. Bouligand, R positif à mon sens ou vice versa. Dans cette théorie unifiée les ensembles scvR d'une part, les ensembles ayant pour frontière une courbe CM (*voir* G. I. D., p. 103) d'autre part, apparaissent comme deux aspects d'une même notion : celle des ensembles dont la frontière coïncide avec le front-R, les premiers correspondant à des valeurs positives, les seconds à des valeurs négatives de R. Ces derniers ensembles sont d'ailleurs, à quelque chose près, ceux que M. Chamard [67e Congrès des Sociétés savantes 1934, (*Sur une généralisation de la notion de figure convexe*)] a nommés ensembles de classe R et que nous préférerions nommer ensembles *sous-convexes*.

THÉORÈME V *bis*. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* Φ_R *coïncide avec* R, *c'est-à-dire pour que* Ψ_R *soit vide, est que* E *soit* scvR *et connexe.*

Existence du front-R.

17. THÉORÈME VI. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *possède un front-*R *non vide est que* E *soit de classe inférieure ou égale à* R.

La condition est évidemment nécessaire puisqu'il doit exister au moins un cercle d'appui de rayon R et que ce cercle doit avoir un rayon supérieur ou égal à celui R_0 du cercle circonscrit.

Elle est suffisante, puisque si elle est réalisée, les points d'appui du cercle circonscrit font partie de Φ_R. Le cercle de rayon R qui passe par un de ces points contient en effet le cercle circonscrit et par conséquent l'ensemble E.

On voit en outre que :

THÉORÈME VII. — *Pour tout ensemble dont la classe est inférieure ou égale à* R *sans toutefois être nulle* (1), Φ_R *contient au moins deux points.*

Remarquons à ce sujet que si le cercle circonscrit ne touche pas F en deux points diamétralement opposés, nous obtenons sur Φ_R trois points formant un triangle acutangle. Il ne faudrait pas en conclure que si Φ_R ne contient que trois points, ils forment nécessairement un triangle acutangle; on peut tout au plus affirmer que s'il n'en est pas ainsi, deux d'entre eux sont les extrémités d'un diamètre de E. Nous reviendrons un peu plus loin là-dessus (§ 26).

Adjoint de la frontière de E.

18. La comparaison de RE et de RF conduit au théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — 1° *Si* RF *n'est pas vide, l'un des deux ensembles* E *ou* CE (2) *est de classe inférieure ou égale à* R *et l'on a, suivant le cas,*

$$RF = RE \quad \text{ou} \quad RF = R(CE).$$

2° *Si* RF *est vide, on a*

$$RF = RE = R(CE) = 0.$$

Rappelons d'abord que tout cercle fermé Γ qui contient F contient E ou CE. Si en effet Γ ne contient pas E, c'est qu'il y a des points de E à l'extérieur de Γ; il est impossible qu'on puisse y trouver aussi des points de CE, car on y trouverait encore des points de F, ce qui contredirait l'hypothèse; donc Γ contient CE.

(1) Un ensemble de classe nulle se réduit par définition à un point; Φ_R est alors constitué par ce point unique.

(2) CE désigne l'ensemble complémentaire de E.

Remarquons encore que des deux ensembles E et CE, l'un au moins n'étant pas borné ne peut être contenu dans aucun cercle.

Ceci posé :

1° Si $RF \neq o$, tout cercle Γ (de rayon R) centré sur RF contient F et contient donc soit E, soit CE; l'un de ces deux ensembles est donc borné et c'est lui qui se trouve nécessairement contenu dans tous les cercles Γ. Il admet donc un adjoint non vide qui contient (P_2, ex. 2°*a*) les centres de tous les Γ, c'est-à-dire qui contient RF. D'autre part F appartient aussi bien à $\overline{E}$ qu'à $\overline{CE}$, donc RF contient les adjoints de $\overline{E}$ et de $\overline{CE}$. Ces deux inclusions en sens inverses entraînent l'égalité et l'on a

$$RF = RE \quad \text{ou} \quad RF = R(CE),$$

suivant que c'est l'un ou l'autre des deux ensembles qui admet un adjoint non vide.

2° Si $RF = o$, RE et R(CE) qui y sont contenus sont également vides.

Le théorème précédent montre que la connaissance de la frontière d'un ensemble suffit à déterminer son adjoint. On peut aller plus loin encore dans cette voie, comme l'indique le théorème suivant :

Théorème IX. — *Si* E *est de classe* R_0, on a

$$R\Phi_R = RF = RE,$$

pourvu que l'on ait $R \geq R_0$.

R étant contenu dans F, on a

$$R\Phi_R \supseteq RF;$$

il reste donc à montrer qu'un point M, s'il est étranger à RF, ne saurait appartenir à $R\Phi_R$. Il existe en effet alors dans l'ensemble fermé RF un point P (projection de M sur RF) dont la distance à M est minimum. La perpendiculaire PH élevée sur PM laisse d'un côté RF et de l'autre le point M. L'ensemble RF étant scvR, il passe par P (qui appartient à sa frontière) tangentiellement à PH un cercle C(Q, R) qui est d'appui pour cet ensemble. Ce cercle laisse M à son extérieur. D'autre part le centre Q de ce cercle est opposé à P dans le couple (F, RF) et le cercle C(P, R) est un cercle d'appui de E au point Q (§ 14). Q fait donc partie de Φ_R et M extérieur à C(Q, R) n'appartient pas à $R\Phi_R$.

C. Q. F. D.

Itération de l'opération R. Enveloppante surconvexe-R.

19. Si l'on effectue sur RE, lorsqu'il existe, l'opération R, on obtient un nouvel ensemble que nous désignerons par R^2E. Cet ensemble ne peut être vide puisque RE est contenu dans tous les cercles de rayon R centrés sur E.

Il est bien entendu scvR et connexe; il contient E d'après le théorème IV. Une condition nécessaire pour qu'il coïncide avec E est que E soit lui-même un ensemble connexe scvR (et par conséquent fermé).

Cette condition est suffisante; en effet si E et R^2E ne coïncidaient pas, il existerait (puisque ces deux ensembles sont fermés) des points étrangers à E, donc aussi des points frontières de E qui seraient *intérieurs* à R^2E. Supposons que A soit un tel point; E étant supposé scvR et connexe, il existe dans RE un point B opposé à A (th. V), et par conséquent tel que $AB = R$. Mais A appartenant à R^2E sera alors opposé à B dans le couple (RE, R^2E); A sera donc un point frontière de R^2E, ce qui entraîne contradiction. Ainsi :

Théorème X. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$R^2E = E$$

est que E *soit* scvR *et connexe.*

Il y a dans ce cas une parfaite réciprocité entre E et RE, chacun d'eux étant l'adjoint de l'autre; nous dirons alors que ces deux ensembles sont R — complémentaires.

Les raisons de cette dénomination seront données dans un chapitre ultérieur consacré à ce cas très important (1). Remarquons pour finir que dans la démonstration qui vient d'être donnée l'hypothèse de surconvexité n'intervient que pour assurer l'existence au point A d'un cercle d'appui de E. Le théorème suivant se trouve établi par la même occasion :

Théorème XI. — *Tout point de* Φ_R *appartient à la frontière de* R^2E.

Ce théorème jouera un rôle important dans l'étude de la frontière de l'enveloppante surconvexe d'un ensemble (§ 24).

20. Théorème XII. — *Si un ensemble* E' *est tel que*

$$E \subseteq E' \subseteq R^2E, \tag{1}$$

on a

$$R^2E' = R^2E.$$

En effet, de (1) et du théorème I, on tire

$$RE \supseteq RE' \supseteq RR^2E,$$

puis

$$R^2E \subseteq R^2E' \subseteq R^2R^2E.$$

---

(1) M. Nicolesco (**N**, p. 751) mentionne sans l'avoir démontré la possibilité pour deux ensembles d'être adjoints l'un de l'autre et fait alors remarquer que cette notion revient à celle d'ensembles « bi-parallèles de seconde sorte ».

Mais R^2E étant scvR, on a, d'après le théorème XII,

$$R^2R^2E = R^2E,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème XIII. — *Tout ensemble* scvR *qui contient* E *contient aussi* R^2E.

Soit K un tel ensemble; l'ensemble $K' = K.R^2E$ satisfait aux hypothèses du théorème précédent, il est de plus scvR comme intersection de deux ensembles scvR. On a donc simultanément :

$$R^2K' = R^2E;\ R^2K' = K'$$

d'où

$$R^2E = K' \subseteq K. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi l'ensemble R^2E est un ensemble scvR contenant E et contenu dans tout autre ensemble jouissant de ces deux propriétés; il peut donc être considéré :

D'une part comme l'intersection de tous les ensembles scvR qui contiennent E(1); d'autre part comme l'ensemble saturé inférieurement par rapport aux deux propriétés : contenir E, être scvR.

A ce double titre, il mérite le nom *d'enveloppante* scvR de E (en abrégé : enveloppante-R). Nous le désignerons par K_RE et plus simplement par K_R ou même par K lorsque l'ambiguïté n'est pas possible. D'après le début du paragraphe 19 et le théorème I, *la condition nécessaire et suffisante pour que* E *possède une enveloppante-*R *est qu'il soit de classe inférieure à* R (2).

21. Voici quelques remarques sur les enveloppantes surconvexes. Ce sont des applications immédiates du théorème XIII.

Remarque 1. — *Si* $E \supset E'$, *on a*

$$K_RE \supseteq K_RE',$$

puisque K_RE est un ensemble surconvexe contenant E, donc E'.

Remarque 2. — Si $R' > R$, K_RE *étant* scvR *est aussi* scvR', et l'on aura

$$K_RE \supseteq K_{R'}E.$$

Les enveloppantes d'un même ensemble pour des rayons de plus en plus grands, sont donc emboîtées les unes dans les autres. La première de toutes qui

(1) C'est la définition adoptée par MM. Van der Corput et Buter. Ces auteurs ne font d'ailleurs aucun emploi des ensembles adjoints et de l'opération-R. En ce qui concerne l'étude proprement dite des enveloppantes, M. Buter se borne à déterminer l'enveloppante d'un système de n points et M. Van der Corput à démontrer la convexité des enveloppantes surconvexes (problème qui ne se pose que si l'on adopte les définitions plus générales de cet auteur).

(2) Cette condition revient à celle donnée sous une forme un peu différente par MM. Buter et Van der Corput (**H** p. 45 et **V** p. 951). Tous les autres résultats donnés ici sur les enveloppantes sont nouveaux.

les contient toutes est K_{R_0}, c'est-à-dire le cercle circonscrit à E. Chacune d'elles étant convexe et contenant E, contiendra aussi l'enveloppante convexe $\mathfrak{K}E$.

Remarque 3. — Si E est scvR, il est aussi scvR′ pour toute valeur R′ supérieure à R. Il se confond alors (th. X) avec son enveloppante K_R et toutes ses enveloppantes d'indice supérieur. Il est d'ailleurs aussi convexe et se confond aussi avec son enveloppante convexe.

Remarque 4. — En particulier l'enveloppante R de K_R est confondue avec K_R ainsi que ses enveloppantes d'indices supérieurs. Si $R'' < R$, $K_{R''}E$ est scvR″ et contient K_RE; $K_{R''}E$ contient donc l'enveloppante R″ de K_R; or cette dernière contient $K_{R''}E$ en vertu de la remarque 1. *On voit donc que* $K_{R''}(K_RE)$ *coïncide avec* $K_{R''}E$ *si* $R'' < R$. *On verrait de même que* $K_{R''}E$ *coïncide avec* $K_{R''}(\mathfrak{K}E)$ *quel que soit* R″.

Cette dernière remarque permettra dans l'étude des enveloppantes successives *de remplacer si on le désire* E *par* $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire de supposer E convexe.

Le remplacement de E par K_RE n'est possible que pour l'étude des enveloppantes d'indice inférieur à R.

22. Voici un aspect un peu différent de la notion d'enveloppante. En revenant à la définition de K_R comme partie commune à tous les cercles fermés de rayon R centrés sur RE et en s'appuyant sur le théorème IV, on est conduit à la définition suivante :

Définition II. — *L'enveloppante-*R *d'un ensemble est la partie commune à tous les cercles fermés de rayon* R *qui contiennent cet ensemble.*

Si enfin on s'appuie sur le théorème VIII et sur la deuxième partie du théorème IV, on obtient :

Définition III. — *L'enveloppante-*R *d'un ensemble est la partie commune à tous les cercles d'appui de rayon* R *de l'ensemble.*

23. Tout ce qui précède donne à penser que l'enveloppante-R généralisation naturelle de l'enveloppante convexe (aussi bien par sa définition comme ensemble saturé que par les deux définitions qui viennent d'être obtenues) lui est liée par un processus de passage à la limite.

Nous avons mis en évidence au paragraphe 12 une chaine d'ensembles emboîtés dont le premier est le cercle circonscrit à E, dont le dernier est l'enveloppante convexe. Si E est scvR, tous les ensembles de cette chaine à partir de K_R *sont d'ailleurs confondus avec* $\mathfrak{K}$ *qui apparaît ainsi à la fois comme la limite et comme l'intersection de tous les ensembles de la famille.*

Ce résultat sous cette dernière forme s'étend au cas général où E n'est pas scvR.

THÉORÈME XIV. — *E étant un ensemble borné quelconque, son enveloppante convexe* $\mathfrak{K}$ *est à la fois l'intersection de tous les* K_R *et l'ensemble limite de la famille des* K_R *lorsqu'on fait tendre* R *vers l'infini.*

Nous n'avons plus à démontrer ceci que dans le cas où E n'est scv pour aucune valeur de R. Il suffira d'établir que, quelle que soit la suite $\{R_i\}$ convergeant vers $+\infty$, la suite d'ensembles $\{K_{R_i}\}$ converge vers $\mathfrak{K}$.

Or, on a

$$K_{R_0} \supseteq R_{R_1} \supseteq \ldots \supseteq K_{R_n} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{K} \supseteq E.$$

La suite $\{K_{R_n}\}$, en tant que suite d'ensembles emboîtés, admet à ce titre une limite $\mathfrak{K}'$ [à la fois limite de Borel, limite topologique et limite métrique (¹)]. Cet ensemble $\mathfrak{K}'$ est d'ailleurs fermé comme intersection d'une famille d'ensembles fermés; on a, de plus,

$$\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{K}.$$

C'est enfin un ensemble convexe en tant que limite métrique d'une suite d'ensembles convexes (²).

Je dis que $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$.

Il reste à montrer pour cela qu'un point étranger à $\mathfrak{K}$ ne peut appartenir à $\mathfrak{K}'$.

Soit M un tel point, il existe une droite d'appui de $\mathfrak{K}$ qui le sépare de cet ensemble et donc de E. Soient Δ cette droite et C_0 le cercle circonscrit à $\mathfrak{K}$. Ce cercle touche $\mathfrak{K}$ soit en deux points diamétralement opposés, soit en trois points formant un triangle acutangle, en sorte que $\mathfrak{K}$ et *a fortiori* E se trouvent dans le plus grand des deux segments du cercle C_0 déterminés par Δ (avec le cas possible où Δ serait un diamètre de C_0 et où le segment de droite AB découpé sur Δ par C_0 ferait entièrement partie de la frontière de $\mathfrak{K}$; $\mathfrak{K}$ serait alors contenu dans une des moitiés de C_0).

Dans un cas comme dans l'autre, tout cercle de rayon supérieur à R_0, passant par AB et dont le centre est du même côté de Δ que $\mathfrak{K}$, contient à son intérieur le segment de C_0 qui contient $\mathfrak{K}$ et *a fortiori* $\mathfrak{K}$ lui-même, donc aussi E. Soient Γ un tel cercle, R son rayon; Γ étant scvR contiendra aussi K_R.

M étant séparé de E par Δ, on pourra trouver r assez grand pour que M devienne extérieur à Γ aussitôt que $R > r$. Alors K_{R_n} ne contient plus M dès que $R_n > r$ et M ne peut appartenir à $\mathfrak{K}'$ (³). C. Q. F. D.

(¹) Sur la convergence topologique d'une suite monotone, *voir* G. BOULIGAND, *G. I. D.*, p. 156. Sur les différents types de limites et la coïncidence entre limite topologique et limite métrique, *voir* BLANC (**EM**, p. 50-61).

(²) BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, p. 60.

(³) On démontrerait d'une façon semblable que si R tend vers r en croissant, K_R tend vers K_r. On verrait aussi, sans grande difficulté, qu'il en est de même si R tend vers r en décroissant. K_R apparaît ainsi comme une « fonction » continue de la variable K au sens indiqué dans ma Thèse (**EM**, p. 60, note au bas de la page).

Il paraît assez légitime maintenant de noter K_∞ l'enveloppante convexe $\mathfrak{K}$ lorsque E est borné; il ne semble pas qu'il y ait d'inconvénient à conserver cette notation lorsque E n'est plus borné. Enfin une extension naturelle sera, pour un ensemble convexe qui n'est surconvexe pour aucune valeur de R, de dire qu'il est scv∞.

Structure de la frontière de K_R.

24. Nous nous proposons ici d'étudier les relations qui existent entre la frontière d'un ensemble, et en particulier le front-R de cet ensemble d'une part, et d'autre part la frontière de l'enveloppante K_R. Nous généraliserons ainsi certaines propriétés bien connues des frontières d'enveloppantes convexes.

Voici d'abord un théorème préliminaire, conséquence directe du théorème IX et de la définition de K_R.

Théorème XV. — *Pour un ensemble de classe inférieure à* R, *l'enveloppante-*R *de l'ensemble, celle de sa frontière et celle de son front-*R *coïncident.*

La connaissance du front-R d'un ensemble entraîne donc celle de l'enveloppante-R de cet ensemble (1).

Théorème XVI. — Φ_R *coïncide avec l'ensemble des points communs à* F *et à la frontière de* K_R.

a. Soit en effet P un point de F, appartenant aussi à la frontière de K_R: K_R étant scvR, il passe par P un cercle de rayon R contenant K_R et *a fortiori* E. On voit donc bien que P appartient à Φ_R.

b. Tout point de Φ_R appartient à la frontière de K_R d'après le théorème XI. Il appartient à F par définition. C. Q. F. D.

Les frontières de E et de K_R étant des ensembles fermés, *il en sera de même de leur intersection* Φ_R. En outre cette intersection sera fermée sur F et sur la frontière G de K_R. Cette dernière, frontière d'un ensemble surconvexe, est une courbe de Jordan. *Le complémentaire de* Φ_R *sur cette courbe* (2) *sera donc composé d'une famille au plus dénombrable d'arcs ouverts* (arcs contigus à Φ_R).

Nous allons montrer qu'un *tel arc appartient à un cercle de rayon* R *qui s'appuie au moins deux fois sur* R. Pour la démonstration nous pourrons supposer que E se réduit à Φ_R.

---

(1) On pourrait dire que vis-à-vis de l'enveloppante-R d'un ensemble, le front-R constitue en quelque sorte le squelette de cet ensemble.

(2) Il ne faut pas le confondre avec le complémentaire Ψ_R de Φ_R *sur* F.

Soit alors sur la frontière G de K_R un arc AB contigu à Φ_R; A et B font partie de Φ_R qui est fermé. Soit AX la demi-tangente en A à G du côté opposé à B et soit BY la demi-tangente en B à G du côté opposé à A. Ces demi-tangentes existent puisque G est une courbe convexe; elles sont portées par des droites d'appui de E.

L'ensemble K_R étant scvR, les cercles de rayon R respectivement tangents en A et B à AX et BY et situés du même côté de ces droites que l'ensemble E, sont des cercles d'appui pour K_R et la lentille $\mathcal{L}$ qu'ils forment contient K_R et *a fortiori* E.

La droite AB partage le plan en deux demi-plans; G étant convexe, l'un d'eux contient l'arc AB que nous étudions et l'autre l'arc de G qui en est le complément et en particulier tout l'ensemble Φ_R, c'est-à-dire E; AB est donc une droite d'appui double de E. Considérons enfin le cercle Γ de rayon R, qui passe par A et B et dont le centre est situé du même côté que E par rapport à AB. Ce cercle contient la portion de $\mathcal{L}$ qui est du même côté de AB que E. Il contient donc E. L'intersection S de ce cercle et de $\mathcal{L}$ contient donc E. C'est un ensemble scvR, il contient donc K_R.

D'autre part K_R contient la lentille $L(A, B; \overline{R})$ dont l'un des bords est justement l'arc AB de Γ situé du côté de AB opposé à E, arc qui fait aussi partie de la frontière de S. Cet arc fait donc simultanément partie de la frontière de S et de celle de K_R. Il se confond avec l'arc AB de G que l'on voulait étudier. Le cercle Γ dont il fait partie est d'appui pour E en A et B.

On peut résumer ceci dans l'énoncé suivant :

Théorème XVII. — *La frontière* G *de l'enveloppante-*R *d'un ensemble* E *est une courbe de Jordan fermée, sans points doubles, convexe et même scv*R*, pouvant éventuellement contenir une infinité au plus dénombrable d'arcs de cercle de rayon* R *disjoints les uns des autres. Un tel arc est porté par un cercle qui s'appuie sur* E *aux deux extrémités de l'arc. Le complément sur* G *de cette famille d'arcs de cercles est formé des points communs à* G *et à* F *et constitue le front-*R *de* E.

On voit que les points anguleux de G devront en particulier appartenir à Φ_R.

25. Portons maintenant notre attention sur les cercles d'appui de rayon R de l'ensemble E.

Soit C l'un de ces cercles; il contient K_R (déf. II, § 22). Soit A l'un de ses points d'appui sur E : A appartient par définition à Φ_R donc à G; A est donc aussi point d'appui sur l'ensemble K_R du cercle C qui en est aussi un cercle d'appui. Ainsi :

Théorème XVIII. — *Tout cercle d'appui de* E, *l'est aussi de* K_R, *et tout point d'appui d'un tel cercle sur* E *l'est aussi sur* K_R.

Il ne faudrait pas croire que la réciproque de la seconde partie soit vraie : supposons E formé de deux points A, B distants de moins de 2R; K_R est la lentille $L(A, B; \overline{R})$. Chacun des deux cercles qui forment la lentille est cercle d'appui de E et de K_R, les points d'appui sur E étant A et B, tandis que les points d'appui sur K_R sont tous les points de l'un des deux arcs qui limitent la lentille.

26. Étant donné un cercle d'appui C commun à E et K_R, considérons l'ensemble de ses points d'appui sur K_R. Plusieurs cas sont possibles :

1° *Il y a un seul point d'appui :* il est nécessairement aussi le point d'appui sur E; il appartient donc à Φ_R.

2° *Il y en a deux soient* A *et* B *qui déterminent sur* C *deux arcs inégaux.*

De ces deux arcs appelons γ celui qui est inférieur à π : K_R étant scvR et contenant A et B contient γ, mais est contenu dans le cercle C dont γ fait partie. L'arc γ est donc commun à C et à la frontière G de K_R; il est donc entièrement formé de points d'appui de C sur K_R (¹).

3° *Il y a au moins deux points d'appui diamétralement opposés sur* C.

On pourra répéter pour chacun des demi-cercles le raisonnement qui vient d'être fait. Tout le cercle fait partie de la frontière de K_R. Il en constitue alors la totalité. E est de classe R et K_R en est le cercle circonscrit.

4° *Il y a au moins trois points d'appui formant un triangle acutangle.* Le raisonnement ci-dessus s'applique aux trois arcs déterminés sur C par ces trois points. Les conclusions sont les mêmes qu'au 3°.

Il est évident que cette discussion épuise tous les cas possibles. Ainsi :

Théorème XIX. — *Tout cercle d'appui de* E *a sur* K_R *soit un point unique d'appui qui appartient alors à* Φ_R, *soit un arc moindre que* π *de points d'appui. Le seul cercle d'appui qui puisse avoir sur* K_R *deux points d'appui diamétralement opposés ou trois points d'appui en triangle acutangle est le cercle circonscrit à* E. *Dans ce cas* E *est de la classe* R.

27. Revenons en passant sur une question qui s'est posée au paragraphe 17 : celle de la configuration que l'on obtient lorsque Φ_R ne contient que trois points, c'est-à-dire lorsque la frontière G de K_R ne s'appuie sur E que par trois points A, B, C. On peut admettre que E se réduit à ces trois points (th. XV).

La frontière de K_R est alors formée de trois arcs de cercles de rayon R passant respectivement par A et B, B et C, C et A.

(¹) Il est bon de remarquer que ce n'est pas forcément un arc contigu à Φ_R. Il peut soit être contenu dans un tel arc, soit contenir des points de Φ_R.

Il peut très bien se faire que le triangle ABC soit obtusangle, mais alors le plus grand côté est un diamètre de l'ensemble; supposons que ce soit AB. Le troisième sommet C ne doit pas être intérieur à la lentille $L(A, B; \overline{R})$, sinon C ne ferait pas partie de Φ_R. Mais alors l'angle ACB doit être inférieur à $\pi - \text{Arc sin}\frac{D}{2R}$, D étant le diamètre AB de l'ensemble et la notation Arc sin désignant un angle aigu. L'angle en C étant le plus grand des trois angles du triangle, on voit que :

Théorème XX. — *Si la frontière de l'enveloppante-*R *ne s'appuie qu'en trois points sur celle de* E, *chacun des angles du triangle formé par ces trois points est inférieur à* $\pi - \text{Arc sin}\frac{D}{2R}$. (Dans le cas où ABC serait acutangle, cette condition est en effet automatiquement réalisée.)

Cette condition s'apparente à celle du triangle acutangle pour le cercle circonscrit qui est une K_R particulière.

28. Il est évident que si $R' > R$, tout point de Φ_R appartient à $\Phi_{R'}$. De même, quel que soit R, tout point de Φ_R appartient au front de convexité Φ_∞. En effet si en A passe un cercle d'appui C de rayon R, l'un des cercles de rayon R' qui lui est tangent le contient et contient aussi E.

D'autre part, on sait que la tangente en A à un tel cercle est droite d'appui de E. On peut donc écrire

$$\Phi_{R_0} \subseteq \Phi_{R_1} \subseteq \Phi_{R_2} \cdots \subseteq \Phi_{R_n} \cdots .$$

La suite $\{\Phi_{R_n}\}$ monotone et croissante est convergente aux sens topologique et métrique et tend vers une limite Φ. Il est évident que $\Phi \subseteq \Phi_\infty$, mais contrairement à ce qui se passe pour les enveloppantes elles-mêmes, Φ ne coïncide pas forcément avec Φ_∞. De même si R tend vers r en croissant, Φ_R ne tend pas forcément vers Φ_r. Il suffit pour le voir de supposer que F contient un arc de cercle moindre que π de rayon r. Cet arc ne peut appartenir à Φ_R tant que $R < r$, il appartient tout entier à Φ_R si $R \geq r$. (Pour montrer la non-coïncidence de Φ et de Φ_∞, il suffit de supposer que la frontière de E contient un segment rectiligne.) Par contre, si R tend en décroissant vers r, Φ_R tend vers r. Soit en effet une suite décroissante $R_1, \ldots R_n, \ldots$ tendant vers r. La suite $\{\Phi_{R_n}\}$ est monotone et converge vers un ensemble Φ_{r+0} qui contiendra Φ_r; Φ_{r+0} est l'intersection de tous les Φ_{R_n}; par un point A de cet ensemble et tangentiellement à l'une quelconque des droites d'appui en ce point, passe donc un cercle d'appui de rayon R_1, un de rayon R_2, un de rayon R_n, etc. Tous ces cercles d'appui tangents entre eux ont pour limite un cercle fermé de rayon r. Aucun point de E ne peut être extérieur à ce cercle, car il serait aussi extérieur à l'un des cercles de rayon supérieur mais suffisamment voisin. Ce cercle limite de rayon r est donc aussi cercle d'appui et le point A appartient à Φ_r. Ainsi

$$\Phi_{r+0} \subseteq \Phi_r \qquad \text{d'où résulte que } \Phi_{r+0} = \Phi_r.$$

C. Q. F. D.

On peut donc conclure :

THÉORÈME XXI. — Φ_R *est une fonction de* R *continue à droite mais pas forcément à gauche.*

Une construction intuitive de l'enveloppante-R.

29. Soit E un ensemble de classe inférieure à R. *Adjoignons à* E *toutes les lentilles* $L(A, B; \overline{R})$ *relatives à tous les couples* A, B *de l'ensemble* E. *Recommençons la même opération sur l'ensemble* E_1 *ainsi obtenu. Nous obtiendrons ainsi un ensemble* E_2 *qui est l'enveloppante cherchée.*

Il est évident que K_R contenant E doit par suite de sa surconvexité, contenir E_1, et pour la même raison E_2. Il reste donc à démontrer que tout point de K_R appartient à E_2.

Considérons un point M de la frontière G de K_R; s'il appartient à Φ_R, il appartient à E, donc à E_1. S'il n'appartient pas à Φ_R, il appartient à un arc contigu AB; cet arc appartient à la frontière de $L(A, B; \overline{R})$. Les points A et B appartenant à E, le point M sera donc introduit dans la première étape et appartiendra à E_1.

Soit alors un point P de K_R n'appartenant ni à E, ni à E_1. Toute droite issue de P coupe G en deux points I et J et P est intérieur au segment IJ. Ces deux points appartenant à E_1, P a été introduit au cours de la deuxième étape. Il appartient donc à E_2 (1). C. Q. F. D.

On peut se demander ce que donnerait cette construction pour un ensemble de classe supérieure à R.

E_2 ne pourrait être scvR puisque E_2 contient E qui ne peut l'être. Le processus d'adjonction des lentilles au lieu de se trouver arrêté dès la deuxième étape devrait donc se poursuivre et conduire à un ensemble E_3, puis à E_4, etc.. aucun d'entre eux ne pouvant être scvR. L'ensemble limite E_ω de la suite monotone (et donc convergente) $\{E_n\}$ ne pourrait être non plus scvR. On pourrait donc définir $E_{\omega+1}$, etc., puis $E_{2\omega}$, etc., tous les ensembles successivement définis étant distincts à moins que l'un d'eux n'arrive à contenir tout le plan. La question de savoir si cela doit se produire après une infinité dénombrable d'opérations reste ouverte.

---

(1) La démonstration montre qu'il suffit dans la seconde opération de « convexifier » E_1, c'est-à-dire d'introduire des segments au lieu de lentilles.

En convexifiant deux fois un ensemble, on obtiendra de même son enveloppante convexe. Je n'ai trouvé ce dernier résultat énoncé ni démontré nulle part. Vu son caractère intuitif, je ne crois pas cependant qu'il soit nouveau.

On pourrait encore, pour obtenir K_R, faire d'abord une convexification (segments) puis une « surconvexification » (lentilles) du résultat. Dans la première étape, les arcs contigus de Φ_R sur r seront remplacés par des segments de droite et le reste de la démonstration est simple. On retrouvera ainsi comme cas particulier le résultat de Buter sur l'enveloppante d'un polygone convexe.

CHAPITRE III.

UNE APPLICATION DE GÉOMÉTRIE FINIE.

30. Rappelons que l'on désigne, dans le plan, par continu d'ordre k, tout continu coupé en k points au plus par toute droite du plan. Plus généralement, un continu est dit d'ordre k par rapport à une famille de courbe $\mathcal{F}$, s'il est coupé en k points au plus par toute courbe de la famille.

C'est dans ce sens qu'il faut comprendre une remarque faite plus haut (Chap. I, § 8) et qui fait apparaître les frontières d'ensembles scvR comme des continus d'ordre 2 par rapport à une famille $\mathcal{F}_R$ formée de toutes les droites du plan et de tous les cercles de rayon supérieur à R (¹).

Nous nous proposons dans le présent chapitre de caractériser tous les continus qui possèdent la même propriété, c'est-à-dire qui sont d'ordre 2 par rapport à la famille $\mathcal{F}_R$. Nous montrerons en particulier qu'un tel continu est soit la frontière d'un ensemble scvR, soit un arc de cette frontière.

31. Remarquons tout d'abord qu'un tel continu $\mathcal{C}$ sera d'ordre 2 au premier sens du mot; les résultats de M. Marchaud (*loc. cit.*, Chap. II, p. 85) lui sont par conséquent applicables :

a. $\mathcal{C}$ est une courbe de Jordan rectifiable convexe ouverte ou fermée (c'est donc ou bien la frontière d'un ensemble convexe ou bien un arc de cette frontière; à ce titre, le théorème que nous voulons établir sera la généralisation directe de ce résultat).

(¹) C'est M. André Marchaud [*Sur les continus d'ordre borné* (*Act. Math.*, t. 55, p. 67-115)] qui introduit la notion de continu d'ordre k, généralisation de celle de courbe d'ordre k due à M. C. Juel. Dans le même Mémoire, M. Marchaud définit aussi les continus d'ordre k par rapport à une famille de courbes et traite le cas où cette famille est constituée par *tous* les cercles du plan (*loc. cit.*, Chap. IV : *Continus plans d'ordre cyclique borné*). Il est à remarquer que les continus étudiés ici ne sont pas forcément des continus d'ordre cyclique 2 (il n'existe d'ailleurs aucun continu d'ordre cyclique 2), car rien n'empêche qu'ils soient coupés en plus de deux points par un cercle de rayon inférieur à R. Leur ordre cyclique peut même ne pas être borné. Nous en donnerons un exemple en appendice à ce chapitre.

Nous prenons ici les définitions avec leur sens absolu : un arc de cercle dont le rayon R_1 est supérieur à R, ne doit pas être regardé comme appartenant à la classe de continus qui nous occupe, puisqu'il existe un cercle de rayon supérieur à R qui le contient et par conséquent le coupe en une infinité de points; de même un segment de droite n'appartient pas à cette classe puisque sa droite de support a une infinité de points communs avec lui.

Remarquons enfin, dans le même ordre d'idées, qu'une frontière d'ensemble scv R, pouvant contenir des arcs de rayon R, n'est pas forcément d'ordre 2 par rapport à la famille $\mathcal{F}'_R$ obtenue en remplaçant « supérieur à R » par « supérieur ou égal à R » dans la définition de $\mathcal{F}_R$.

b. En tout point de $\mathcal{C}$, le contingent se réduit à deux demi-tangentes qui sont opposées, sauf en une infinité dénombrable de points.

c. Si en tous les points d'un arc de $\mathcal{C}$ les deux demi-tangentes sont opposées, la tangente qu'elles forment varie d'une façon continue lorsque le point de contact décrit l'arc.

32. En second lieu la catégorie de continus que nous venons de définir se confond avec une autre catégorie importante dont les frontières scvR nous ont déjà donné un exemple.

Soient sur $\mathcal{C}$ trois points distincts A, B, C : s'ils sont alignés nous dirons *que $\mathcal{C}$ possède sur le triplet* (A, B, C) *un indice de courbure nul*; s'ils ne sont pas alignés, nous appellerons *indice de courbure de $\mathcal{C}$ sur le triplet* (A, B, C) *l'inverse du rayon du cercle circonscrit à ce triplet* (1).

Dire que l'indice de courbure de $\mathcal{C}$ reste supérieur à un nombre K quel que soit le triplet choisi, revient évidemment à dire que toute droite et que tout cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{K}$ ne peuvent avoir avec $\mathcal{C}$ plus de deux points communs. Ainsi :

La notion de continu d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$ est identique à celle de continu dont l'indice de courbure est borné inférieurement par $\frac{1}{R}$.

Il en résulte immédiatement, si l'on reproduit des raisonnements déjà faits (Chap. I, §§ 4 et 5) et uniquement basés sur la limitation de l'indice de courbure et sur le fait que $\mathcal{C}$ est une courbe convexe, que :

Théorème I. — *Tout continu d'ordre 2 relativement à $\mathcal{F}_R$ possède en chacun de ses points une courbure inférieure de Menger au moins égale à $\frac{1}{R}$; de plus il passe en ce point un cercle d'appui local du continu* (2).

---

(1) M. Menger dit simplement : courbure du triplet; il nous a paru nécessaire de compliquer ici légèrement la terminologie de façon à pouvoir distinguer entre : continus à courbure bornée, continus à courbure moyenne (*Biegung*) bornée, continus à courbure moyenne (*Durschnittkrümung*) bornée, et continus à indices de courbure bornée. La « Biegung » d'un arc fini est pour M. Carathéodory [*Die Kurven mit beschränkten Biegungen* (*Sitz. Preuss. Ak. Wiss. Ph. Math. Klasse*, 1933, III-IV, p. 102-125) le rapport de la déflexion (angle de contingence) à la longueur de l'arc, la « Durschnittkrumung » de M. Schmidt est le rapport de l'arc d'indicatrice à l'arc de courbe [*Über des Extremum der Bogenlänge* etc. (*Sitz. Preuss. Ak. Wiss.*, 1925, p. 185-190)].

M. Carathéodory établit d'ailleurs dans le Mémoire cité l'équivalence entre les catégories suivantes : continus à Biegung bornée supérieurement, continus à Durschnittkrümung bornée supérieurement, continus à indices de courbure bornée supérieurement. Cette équivalence n'a pas été établie jusqu'ici pour le cas de bornes inférieures.

(2) La dernière partie de ce théorème constitue une contre-partie de l'un des résultats obtenus par M. Carathéodory sur les courbes à indice de courbure borné *supérieurement*.

33. Théorème II. — *Tout continu $\mathcal{C}$ d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$ est de classe au plus égale à* R. *Il admet à ce titre une enveloppante* scvR, K_R.

Supposons en effet que le cercle Γ circonscrit à $\mathcal{C}$ soit de rayon R_1 supérieur à R; $\mathcal{C}$ étant d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$, Γ ne peut s'appuyer sur $\mathcal{C}$ en trois points. Il s'appuie donc nécessairement en deux points A et B diamétralement opposés et tels par conséquent que $AB = 2R_1$. Ces deux points ne peuvent être les seuls qui constituent $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est un continu. Soit C un autre point de $\mathcal{C}$: si l'on veut satisfaire à l'hypothèse, les trois points A, B, C ne peuvent être ni alignés, ni sur un cercle de rayon supérieur à R, ce qui est absurde puisque si ces trois points ne sont pas alignés, le cercle qu'ils déterminent a un rayon forcément supérieur à $\frac{AB}{2}$ (1).

Théorème III. — *Étant donnés deux points* A *et* B *communs à $\mathcal{C}$ et à la frontière* G *de* K_R, *tout arc déterminé par* A *et* B *sur $\mathcal{C}$ appartient en entier à* G.

En effet, G étant frontière scvR est d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$; la droite AB ne la coupe donc qu'aux deux points A et B. D'autre part K_R contient la lentille $L(A, B; \overline{R})$; il existe donc dans K_R des points situés de part et d'autre de AB; ainsi G se compose de deux parties G_1 et G_2 situées de part et d'autre de AB et n'ayant en commun que ces deux points.

Sur $\mathcal{C}$, les points AB déterminent soit un arc, soit deux suivant que $\mathcal{C}$ est une courbe ouverte ou fermée. Suivant le cas, prenons cet arc unique ou l'un quelconque des deux et désignons-le par Γ; ne pouvant recouper AB, Γ est tout entier d'un même côté de cette droite. Nous conviendrons d'appeler G_1 celle des portions de G qui se trouve du même côté de AB que l'arc Γ. Nous appellerons π_1 celui des demi-plans déterminés par AB qui contient G_1 et Γ; π_2 sera le demi-plan complémentaire.

La réunion G de l'arc Γ et de G_2 constitue une nouvelle courbe de Jordan sans points multiples et limite un domaine fermé K′ qui l'admet pour frontière. K′ est évidemment contenu dans K_R. En tout point de Γ passe un cercle d'appui local de rayon R, puisque Γ fait partie du continu $\mathcal{C}$ dont l'indice de courbure est supérieur à $\frac{1}{R}$; en tout point de G_2 passe aussi un cercle d'appui local, puisque K_R y possède un tel cercle et que $K' \subset K$ (ce dernier raisonnement reste d'ailleurs valable en A et en B). Il en résulte (Chap. V, th. VIII) que K′ est scvR. Si l'on parvient à établir que $\mathcal{C}$ est contenu dans K′, ce dernier ensemble devra coïncider avec K_R en vertu de la définition même de l'enveloppante-R, et le théorème annoncé sera établi.

---

(1) Ce raisonnement ne serait pas concluant si nous n'avions pas exclu de la classe des continus $\mathcal{C}$ les segments de droite et les arcs de cercles de rayon supérieur à R.

Soit donc P un point de $\mathcal{C}$ supposé ne pas appartenir à K'. Ce point devant appartenir à K_R ne pourrait être dans π_2, car dans ce demi-plan, K' et K_R coïncident. Il sera donc dans π_1, c'est-à-dire du même côté de AB que l'arc Γ, mais sans appartenir à cet arc qui fait lui-même partie de K'.

$\mathcal{C}$ étant une courbe de Jordan, il existe sur cette courbe soit un arc AP, soit un arc BP, soit les deux à la fois. Supposons, pour fixer les idées que le premier cas soit le bon; la droite AB ne pouvant recouper $\mathcal{C}$, tout l'arc AP serait d'un même côté de AB et par conséquent dans π_1. Soit Q un point quelconque de l'arc Γ; Q ne pouvant être sur AB, il existerait dans π_1, une demi-droite issue de B laissant A d'un côté, P et Q de l'autre; cette demi-droite devrait couper l'arc de Jordan AP entre A et P, l'arc AQ entre A et Q, et enfin le continu $\mathcal{C}$ au point B. Alors $\mathcal{C}$ ne serait pas du second ordre par rapport à $\mathcal{F}_R$.

C. Q. F. D.

34. Tout ensemble ayant au moins deux points communs avec son enveloppante convexe, *si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée*, ces deux points A et B y déterminent deux arcs qui, l'un et l'autre, appartiendront à G. Cette dernière frontière étant elle-même une courbe fermée convexe ne pourra contenir de points étrangers à $\mathcal{C}$. *Dans ce cas* G *et* $\mathcal{C}$ *coïncident donc.*

Si maintenant $\mathcal{C}$ est une courbe ouverte, comme c'est un continu et par conséquent un ensemble fermé, l'ensemble des points qu'il a en commun avec G n'est autre que son front-R; c'est-à-dire un nouvel ensemble fermé. Si l'on parcourt $\mathcal{C}$ depuis son origine α jusqu'à son extrémité β (ces deux points étant confondus si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée), on rencontrera un premier point A et un dernier point B appartenant à Φ_R. Le front-R étant formé d'au moins deux points, A et B sont distincts et le théorème précédent s'applique; l'arc AB appartient en entier à la frontière G. Il reste alors sur cette frontière un arc contigu à Φ_R et constitué par un arc de cercle de rayon R inférieur à un demi-cercle et joignant A et B; c'est cet arc qui joue le rôle de G_2.

Je dis que A coïncide alors nécessairement avec α et B avec β. S'il n'en est pas ainsi, soit P un point de αA par exemple. Il ne peut, nous l'avons vu, être du même côté de AB que l'arc AB. Il est donc du même côté que G_2; il ne peut pas être sur G_2, car alors A ne serait pas le premier point de Φ_R; il ne peut être à l'extérieur de la demi-lentille formée par G_2 et le segment AB; cette demi-lentille est en effet la partie de K_R située dans le demi-plan où se trouve P. Ainsi P serait à l'intérieur de cette demi-lentille; cela aussi est impossible car alors le cercle circonscrit à ABP aurait un rayon supérieur à R. On voit donc que :

Théorème IV. — *Tout continu $\mathcal{C}$ d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$, ou, ce qui revient au même, tout continu à indice de courbure borné inférieurement par $\frac{1}{R}$, est ou bien la frontière d'un ensemble* scv R, *ou bien un arc d'une telle frontière : dans*

ce dernier cas la frontière contient en outre un arc de cercle de rayon R *inférieur à une demi-circonférence et possédant les mêmes extrémités que* $\mathcal{C}$.

Cette dernière partie de l'énoncé apporte en même temps la solution du problème du prolongement de $\mathcal{C}$ sans augmentation de son ordre (relatif à $\mathcal{F}_R$). Elle montre que l'adjonction d'un arc de cercle de rayon R convenablement choisi permet de « compléter » $\mathcal{C}$, c'est-à-dire d'en déduire un ensemble lui aussi d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$ mais non prolongeable (¹).

APPENDICE.

Exemple d'un continu d'ordre 2 par rapport à R et d'ordre cyclique non borné.

35. Sur le cercle Γ de rayon $\frac{R}{2}$, de centre origine (²), prenons les points M_0, $M_1, \ldots, M_n, \ldots M_{-1}, M_{-2}, \ldots, M_{-n}, \ldots$ d'arguments respectifs

$$0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \ldots \quad \frac{\pi}{n}, \quad \ldots \quad -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad \ldots, \quad -\frac{\pi}{n}, \quad \ldots$$

Appelons α_k l'arc de Γ d'extrémités M_k, M_{k+1}. Nous tracerons dans chacun des segments M_{2p}, M_{2p+1} de Γ l'arc de cercle β_{2p} de rayon R passant par les points M_{2p}, et M_{2p+1}. Soit alors T_{2p+1} le point de rencontre de la tangente à β_{2p} au point M_{2p+1} et de la tangente à β_{2p+2} au point M_{2p+2}. Le triangle M_{2p+1}, M_{2p+2}, T_{2p+1} contient à son intérieur l'arc $M_{2p+1}M_{2p+2}$ de Γ. Traçons l'arc de cercle γ_{2p+1} passant par M_{2p+1} M_{2p+2} et tangent par exemple à la bissectrice intérieure de l'angle formé par M_{2p+2} T_{2p+1} et par la tangente à Γ en M_{2p+2} ; γ_{2p+1} sera intérieur au triangle M_{2p+1} M_{2p+2} T_{2p+1} ; il sera en outre extérieur au cercle Γ et comme tel de rayon inférieur à $\frac{R}{2}$. La courbe formée par l'ensemble de tous les arcs β_{2p} et γ_{2p+1} est une courbe convexe présentant un sommet en chacun des points M_i ; sa courbure est égale à $\frac{1}{R}$ en tout point d'un arc β, supérieure à $\frac{2}{R}$ en tout point d'un arc γ. C'est donc une courbe scvR et par conséquent d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$; et pourtant le cercle Γ la coupe en une infinité de points.

(¹) Sur le problème du prolongement (*Ordnungsfeste Erweiterung*) et de la transformation en ensemble complet du même type (*Vervollständigung*), *voir* le Mémoire de M. Otto Haupt, *Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven* (*Math. Zeits.*, t. 39, 1936, p. 126-136). M. Haupt y donne pour les courbes planes d'ordre quelconque (au sens usuel) une solution complète du problème.

(²) Le lecteur est prié de faire la figure.

SUR

LES ÉQUATIONS RELATIVISTES

DE

L'ÉLECTROMAGNÉTISME

PAR M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

INTRODUCTION.

Dans des travaux antérieurs (¹) consacrés à la théorie mathématique des équations de la gravitation relativiste, j'ai montré comment l'on peut étendre aux espaces-temps gravitationnels, extérieurs ou associés à une distribution matérielle, les principaux résultats de la théorie du potentiel et de l'hydrodynamique classique. C'est en me plaçant à un point de vue tout à fait analogue que j'envisage dans le présent travail, la théorie mathématique des équations relativistes de l'électromagnétisme et leur intégration.

Les équations que j'adopte ici sont les équations « naïves » de l'électrodynamique einsteinienne et non celles résultant de telle ou telle théorie unitaire dont l'intérêt apparaît, dans l'état actuel des choses, comme assez douteux. En particulier, l'identification, à un scalaire multiplicatif près du potentiel-vecteur et du vecteur-courant, à laquelle on est naturellement conduit par la théorie de Weyl-Eddington, semble entraîner des difficultés telles qu'elles ont fait abandonner la théorie. Ce sont donc les équations relativistes de l'électromagnétisme telles qu'elles résultent du tenseur d'énergie bien connu que j'étudie ici. Les difficultés relatives à l'addition pure et simple de l'énergie d'origine matérielle et de l'énergie d'origine électromagnétique semblent disparaître si on l'envisage comme une décomposition purement géométrique d'un tenseur symétrique donné.

(¹) LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste* (*Actual. Scient. Ind.*, Hermann, 1939, n° 833); *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale Supérieure*, 1941, fasc. IV); *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps* (sous presse au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*).

La première partie de ce travail est consacrée précisément à l'esquisse d'une telle définition purement géométrique des processus matériels et électromagnétiques à partir du tenseur d'énergie. Les principaux schémas comportant un champ électromagnétique, schéma purement électromagnétique, schémas matière-champ électromagnétique et fluide parfait — champ électromagnétique, sont étudiés en détail. Dans les seconde et troisième parties, je rappelle les équations microscopiques rigoureuses de l'électrodynamique einsteinienne. et je forme les conditions de conservation correspondantes dont le rôle est essentiel pour le problème de l'intégration de ces équations.

La quatrième partie contient une étude du schéma purement électromagnétique et principalement celle de l'*intégration des équations d'Einstein-Maxwell* dans le cas analytique. On y trouvera aussi un théorème qui lie la possibilité d'introduire dans un domaine une distribution purement électromagnétique à la présence dans ce domaine de singularités du champ de gravitation extérieur. Dans la cinquième partie j'introduis l'équation de transfert de l'électricité de Lorentz et j'étudie le *problème de Cauchy* pour les équations de l'électromagnétisme liées à une distribution mixte, matérielle et électromagnétique, ainsi que les singularités du champ électromagnétique engendré par une telle distribution.

On trouvera dans la sixième partie l'extension aux schémas considérés de ma théorie de l'hydrodynamique relativiste : les équations du mouvement admettent *un invariant intégral linéaire* simple, d'où l'on déduit aisément une théorie des tourbillons, des mouvements irrotationnels et des applications aux mouvements permanents. Le Mémoire se termine par l'étude du mouvement de l'électron, compte tenu des tensions mécaniques qui s'exercent sur lui, et par quelques remarques sur les équations macroscopiques.

Les notations sont celles du calcul différentiel absolu classique. En particulier, on a posé

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha.$$

I. — Les processus matériels et le tenseur d'énergie.

1. *Le tenseur d'énergie et les directions principales de l'espace-temps.* — Considérons un domaine d'espace-temps traversé par une forme quelconque d'énergie. A l'intérieur de ce domaine, la métrique de l'espace-temps :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ et tout indice grec} = 1, 2, 3, 4) \tag{1.1}$$

satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

où

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \tag{1.3}$$

est un tenseur symétrique de signification purement géométrique, χ une constante et où $T_{\alpha\beta}$ représente un tenseur symétrique de signification purement mécanique, descriptif de l'énergie considérée. On donne au tenseur $T_{\alpha\beta}$ le nom de *tenseur d'énergie*.

On appelle *directions principales* d'un espace de Riemann en un point déterminé, les directions conjuguées communes au cône isotrope en ce point :

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0, \tag{1.4}$$

et au cône de Ricci

$$R_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0.$$

Il résulte de (1.2) et de (1.3) que, pour un espace-temps intérieur, les directions principales sont conjuguées communes au cône de lumière (1.4) et au cône

$$T_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = 0, \tag{1.5}$$

associé au tenseur d'énergie. Pour abréger nous désignerons par $T(\vec{X})$ la forme quadratique qui figure au premier membre de (1.5), par $g(\vec{X})$ celle qui figure au premier membre de (1.4).

2. *Détermination du repère principal.* — La détermination des directions principales de l'espace-temps se trouve donc ramenée à celle des vecteurs propres de la matrice $(T_{\alpha\beta})$ relativement à la matrice $(g_{\alpha\beta})$. Les valeurs propres de cette matrice relativement à $(g_{\alpha\beta})$ sont les racines de l'équation en s

$$|T_{\alpha\beta} - s g_{\alpha\beta}| = 0. \tag{2.1}$$

Nous supposerons essentiellement que le tenseur $T_{\alpha\beta}$ est tel que ses quatre valeurs propres soient réelles. Il en est en particulier ainsi si la forme quadratique $T(\vec{X})$ est définie positive.

A chaque valeur propre s_λ de $(T_{\alpha\beta})$, correspond un vecteur propre $\vec{V}^{(\lambda)}$ satisfaisant à l'équation

$$(T_{\alpha\beta} - s g_{\alpha\beta})V^{(\lambda)\alpha} = 0, \tag{2.2}$$

pour $s = s_\lambda$ et que nous normerons à l'aide de la condition

$$g_{\alpha\beta}V^{(\lambda)\alpha}V^{(\lambda)\beta} = \pm 1.$$

Nous obtenons ainsi quatre vecteurs propres normés, orthogonaux deux à deux; trois d'entre eux $\vec{V}^{(1)}$, $\vec{V}^{(2)}$, $\vec{V}^{(3)}$ sont orientés dans l'espace et le quatrième $\vec{V}^{(4)}$ est orienté dans le temps. Ces quatre vecteurs forment un repère tétrarectangle, que nous appellerons le *repère principal* de l'espace-temps au

point considéré. Dans le cas où l'une des valeurs propres est double, il peut exister pour le repère principal une certaine indétermination.

Supposons l'espace-temps rapporté au point considéré à son repère principal et désignons par $\vec{X}^{\lambda'}$ les composantes du vecteur $\vec{X}$ par rapport à ce repère. Les vecteurs du repère principal étant normés et orthogonaux deux à deux

$$g\left(\vec{X}\right) = (X^{1'})^2 - (X^{1'})^2 - (X^{2'})^2 - (X^{3'})^2. \tag{2.3}$$

En vertu des équations (2.2), on a alors

$$T\left(\vec{X}\right) = s_4(X^{4'})^2 - s_1(X^{1'})^2 - s_2(X^{2'})^2 - s_3(X^{3'})^2. \tag{2.4}$$

De cette relation, nous allons déduire une expression du tenseur d'énergie à partir de ses valeurs propres et des vecteurs $\vec{V}^{(i)}$ correspondants.

3. *Expressions de $g_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ à partir des $\vec{V}^{(i)}$.* — Dans ce qui suit, nous aurons besoin de la convention suivante : si deux indices ne différant que par la présence du signe ' figurent dans une même formule, ils ont nécessairement la même valeur numérique.

Supposons l'espace-temps rapporté au point considéré à un repère quelconque. On passe des composantes $X_{\lambda'} = -X^{\lambda'}$ du vecteur $\vec{X}$ à ses composantes covariantes générales X_α par les formules

$$X_\alpha = A^{\lambda'}_\alpha X_{\lambda'}.$$

Pour les vecteurs $\vec{V}^{(i)}$, on obtient en particulier

$$\begin{cases} V^{(i)}_\alpha = -A^{i'}_\alpha \\ V^{(4)}_\alpha = A^{4'}_\alpha \end{cases} \qquad (i \text{ et tout indice latin} = 1, 2, 3). \tag{3.1}$$

Introduisons les symboles suivants :

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ -1 & \text{si } \alpha = \beta = i, \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta = 4; \end{cases} \qquad s_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ -s_i & \text{si } \alpha = \beta = i, \\ s_4 & \text{si } \alpha = \beta = 4. \end{cases}$$

Des formules de transformation

$$g_{\alpha\beta} = A^{\lambda'}_\alpha A^{\mu'}_\beta \delta_{\lambda'\mu'},$$
$$T_{\alpha\beta} = A^{\lambda'}_\alpha A^{\mu'}_\beta s_{\lambda'\mu'};$$

et des équations (3.1) on déduit les expressions suivantes de $g_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} \delta_{\lambda\mu} V^{(\lambda)}_\alpha V^{(\mu)}_\beta = V^{(4)}_\alpha V^{(4)}_\beta - V^{(1)}_\alpha V^{(1)}_\beta - V^{(2)}_\alpha V^{(2)}_\beta - V^{(3)}_\alpha V^{(3)}_\beta, \tag{3.2}$$

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} s_{\lambda\mu} V^{(\lambda)}_\alpha V^{(\mu)}_\beta = s_4 V^{(4)}_\alpha V^{(4)}_\beta - s_1 V^{(1)}_\alpha V^{(1)}_\beta - s_2 V^{(2)}_\alpha V^{(2)}_\beta - s_3 V^{(3)}_\alpha V^{(3)}_\beta \tag{3.3}$$

valables par rapport à un repère quelconque.

4. *Schéma normal et schéma exceptionnel.* — Étant donné, dans un domaine d'espace-temps, un champ de tenseurs symétriques $T_{\alpha\beta}$, nous dirons que ce champ définit, dans le domaine, un schéma matériel. Nous dirons que le schéma est *normal* si la forme quadratique $T(\vec{X})$ associée à $T_{\alpha\beta}$ est partout définie positive. Dans le cas contraire, le schéma sera dit *exceptionnel*.

5. *Le schéma normal le plus général ou schéma-fluide quelconque.* — Considérons un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ correspondant à un schéma normal. La forme quadratique $T(\vec{X})$ étant définie positive, la matrice $(T_{\alpha\beta})$ a ses quatre valeurs propres réelles. De plus, en vertu de (2.4), trois d'entre elles s_1, s_2, s_3 sont négatives et la quatrième s_4 est positive.

Nous appellerons désormais *vecteur-vitesse unitaire* du schéma matériel considéré, le vecteur propre normé orienté dans le temps de la matrice $(T_{\alpha\beta})$. Nous posons

$$u_\alpha = V_\alpha^{(4)},$$

$$\rho = s_4, \qquad p_{(i)} = -s_i,$$

où ρ et $p_{(i)}$ désignent ainsi des scalaires positifs. Avec ces notations, les formules (3.2) et (3.3) prennent la forme

$$g_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - \sum_{i=1}^{3} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)} \tag{5.1}$$

et

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \sum_{i=1}^{3} p_{(i)} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}. \tag{5.2}$$

Ainsi, dans le cas du schéma normal le plus général, le tenseur d'énergie peut être mis sous la forme (5.2). Nous dirons que cette forme correspond au schéma-fluide quelconque. Le scalaire positif ρ sera dit la *densité d'énergie propre* du fluide et les scalaires positifs $p_{(i)}$ ses *pressions partielles propres*; les trois directions principales orientées dans l'espace et les pressions $p_{(i)}$ correspondantes définissent, au point considéré du fluide, la quadrique des pressions. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Tout schéma normal peut toujours être interprété comme un schéma-fluide quelconque.*

6. *Le schéma exceptionnel « champ électromagnétique pur ».* — Considérons un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ défini par la formule

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu}) - g^{\lambda\mu} F_{\lambda\alpha} F_{\mu\beta}, \tag{6.1}$$

où $F_{\lambda\mu}$ désigne un tenseur antisymétrique. Nous dirons que la forme (6.1) du

tenseur $T_{\alpha\beta}$ correspond au *schéma « champ électromagnétique pur »* et que le tenseur $F_{\lambda\mu}$ est le tenseur champ électromagnétique. Il résulte d'une étude due à Synge (1) que pour qu'un tenseur d'énergie corresponde au schéma champ électromagnétique, il faut et il suffit que la matrice $(T_{\alpha\beta})$ admette quatre valeurs propres réelles deux à deux égales ou opposées, définies par

$$s_1 = s_2 = -K, \qquad s_3 = s_4 = K.$$

Le schéma ainsi défini est donc un schéma exceptionnel.

7. *Le schéma exceptionnel « matière pure ».* — Nous dirons qn'un schéma matériel est un *schéma « matière pure »* si, pour le tenseur d'énergie correspondant, la matrice $(T_{\alpha\beta})$ admet les valeurs propres réelles

$$s_i = 0, \qquad s_4 = \rho > 0.$$

Ce schéma est évidemment exceptionnel et l'espace-temps correspondant n'admet qu'une seule direction principale privilégiée orientée dans le temps. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta. \tag{7.1}$$

8. *Le schéma exceptionnel « matière-champ électromagnétique ».* — Nous dirons qu'un schéma matériel est un *schéma « matière champ électromagnétique »*, si, pour le tenseur d'énergie correspondant, la matrice $(T_{\alpha\beta})$ admet les valeurs propres réelles

$$s_1 - s_2 = -s_3 = -K, \qquad s_4 = \rho > 0.$$

Ce schéma est encore exceptionnel et l'espace-temps correspondant admet deux directions principales privilégiées, une orientée dans l'espace et une dans le temps. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + K[-V_\alpha^{(1)} V_\beta^{(1)} - V_\alpha^{(2)} V_\beta^{(2)} + V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)}],$$

soit

$$T_{\alpha\beta} = \rho^* u_\alpha u_\beta + \tau_{\alpha\beta}, \tag{8.1}$$

où $\rho^* = \rho - K$ et où $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie d'un schéma champ électromagnétique.

9. *Le schéma fluide parfait.* — Nous dirons qu'un schéma matériel est un *schéma fluide parfait* (où parfaitement parfait selon la dénomination de van Dantzig), s'il est normal et admet une valeur propre triple. Les pressions partielles propres sont alors égales

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

(1) SYNGE, *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, **43**, 1937, pp. 385-386.

et, de la formule (5.2) il vient,

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p \sum_{i=1}^{3} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}.$$

En exprimant $\Sigma V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}$ à l'aide de (5.1), on peut mettre le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}. \tag{9.1}$$

Comme dans le schéma matière pure, l'espace-temps correspondant n'admet qu'une direction principale privilégiée orientée dans le temps.

10. *Le schéma fluide parfait-champ électromagnétique* (1). — Considérons un schéma matériel normal admettant une valeur propre double. Les pressions partielles propres sont alors

$$p_1 = p_2 = p, \qquad p_3 = p'$$

et, de la formule (5.2), on déduit

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p \sum_{i=1}^{2} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)} + p' V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)}.$$

Nous poserons

$$\rho^* = \rho - K.$$

En introduisant un scalaire encore indéterminé p^*, on peut mettre le teuseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\rho^* + p^*) u_\alpha u_\beta - p^* g_{\alpha\beta} + K u_\alpha u_\beta + (p - p^*) \sum_{i=1}^{2} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)} + (p' - p) V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)}.$$

L'ensemble des deux premiers termes figurant au second membre constitue le tenseur d'énergie d'un fluide parfait. L'ensemble des autres termes constituera le tenseur d'énergie d'un champ électromagnétique si l'on peut choisir p^* de façon que

$$p - p^* = -p' + p^* = K.$$

Nous dirons alors que le *schéma est un schéma fluide parfait-champ électromagnétique.*

Nous poserons donc

$$p^* = \frac{p + p'}{2}, \qquad K = \frac{p - p'}{2}, \tag{10.2}$$

et le tenseur $T_{\alpha\beta}$ considéré prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\rho^* + p^*) u_\alpha u_\beta - p^* g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}. \tag{10.3}$$

(1) *Cf.* LICHNEROWICZ. *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 421.

où $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie d'un schéma champ électromagnétique. L'espace-temps correspondant à ce tenseur admet deux directions principales privilégiées, une dans le temps et une dans l'espace.

11. *Remarques sur les schémas normaux et exceptionnels.* — Si, abandonnant momentanément le point de vue exclusivement géométrique adopté jusqu'ici, nous nous plaçons à un point de vue physique, nous pouvons dire que le tenseur $T_{\alpha\beta}$ est destiné à assurer une représentation, aussi complète que possible, du milieu en mouvement considéré. Ce tenseur contiendra différents termes correspondant aux différentes sortes d'énergie que peut admettre celui-ci; le terme le plus important expérimentalement est toujours celui qui correspond à l'énergie pondérable qui l'emporte de beaucoup en particulier sur l'énergie provenant des forces de pression. Si l'on tient compte de ces deux sortes d'énergie le schéma matériel correspondant est un schéma normal. Mais, dans ce schéma, la densité d'énergie propre doit être considérée comme grande par rapport aux pressions partielles propres.

Il est alors aisé d'interpréter les schémas exceptionnels que nous avons mis en évidence. Le schéma champ électromagnétique correspond à l'absence de toute énergie pondérable, ce qui explique son caractère exceptionnel. Les schémas matière pure et matière pure-champ électromagnétique correspondent au cas où l'on néglige totalement l'énergie provenant des pressions. Ces schémas correspondent par suite à une schématisation assez grossière de la matière en mouvement et l'on doit leur préférer, dans la mesure du possible, les schémas normaux tels que le schéma fluide parfait complété ou non par un champ électromagnétique.

A ce sujet, il importe de noter que, *si dans* (10.3) *on fait tendre* p^* *vers zéro*, il résulte de (10.2) que p et p' et par suite K tendent vers zéro. *Ainsi le tenseur* $\tau_{\alpha\beta}$ *tend vers le tenseur identiquement nul. L'existence du champ électromagnétique apparaît dans ce cas comme automatiquement liée à l'existence de tensions mécaniques équilibrant les tensions d'origine électrique*, ce qui corrobore des résultats bien connus de la théorie classique des électrons (1).

II. — Les équations relativistes de l'électromagnétisme.

12. *Analogie avec la théorie des électrons de Lorentz.* — Adoptant un point de vue analogue à celui de Lorentz dans sa théorie classique des électrons, nous indiquerons en premier lieu les équations qui apparaissent, dans la théorie de la relativité générale, comme les équations rigoureuses de l'électromagnétisme. L'élément essentiel qui entre dans ces équations, le tenseur antisymétrique

(1) *Cf.* Becker, *Théorie des électrons*, trad. Labin, Paris, 1938, p. 386.

champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$, varie énormément dans l'espace-temps au sein des particules élémentaires ou dans leur voisinage. Les grandeurs macroscopiques correspondantes qui varient relativement peu dans tout le domaine d'espace-temps balayé par des portions finies de matière et qui se déduisent des grandeurs microscopiques par la formation de moyenne dans l'espace-temps, seront étudiées en détail dans une partie ultérieure de ce travail.

13. *Les équations d'Einstein.* — Soit $T_{\alpha\beta}$ un tenseur d'énergie définissant un schéma comportant un champ électromagnétique (schémas des paragraphes 6, 8, 10 par exemple). D'après les considérations rappelées au paragraphe 1, le champ électromagnétique et la métrique de l'espace-temps gravitationnel correspondant sont liés par les équations d'Einstein du cas intérieur

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}. \tag{13.1}$$

où $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur géométrique défini par les équations (1.3).

14. *Les équations de Maxwell-Lorentz.* — Le champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ est astreint en outre à satisfaire à deux systèmes d'équations différentielles, les équations de Maxwell-Lorentz. Désignons par ∇_α l'opérateur de dérivation covariante dans l'espace de Riemann (1.1). Nous imposons tout d'abord aux $F_{\alpha\beta}$ les quatre conditions

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta, \tag{14.1}$$

où le vecteur J^β décrit le courant d'électricité dans l'espace-temps. Ce vecteur qui figure au second membre des équations (14.1) joue pour ces équations le même rôle que le tenseur d'énergie au second membre des équations d'Einstein. Nous reviendrons ultérieurement sur l'expression de J^β auquel on donne le nom de *vecteur-courant électrique*.

Désignons maintenant par $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ l'indicateur classique de permutation des quatre indices $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$. Le second système des équations de Maxwell-Lorentz sera formé par l'ensemble des quatre équations

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = 0, \tag{14.2}$$

qui expriment, comme nous le verrons, la non-existence d'une densité de masse magnétique. Les équations (13.1), (14.1), (14.2) constituent les équations relativistes « rigoureuses » de l'électromagnétisme.

15. *Autre forme des équations de Maxwell* (14.2). *Le potentiel vecteur.* — En explicitant $\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}$, on peut mettre les équations (14.2) sous une forme souvent commode et qui permet de les interpréter d'une manière simple. On a

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} F_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} F_{\beta\rho}.$$

Or un calcul facile montre que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}[\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}F_{\rho\gamma}+\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}F_{\beta\rho}]=0.$$

Par suite les équations (14.2) peuvent être mises sous la forme équivalente

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_\alpha F_{\beta\gamma}=0. \tag{15.1}$$

Il résulte immédiatement des équations (15.1) qu'il existe un vecteur φ_α tel que le tenseur antisymétrique $F_{\alpha\beta}$ soit son rotationnel

$$F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha\varphi_\beta-\partial_\beta\varphi_\alpha. \tag{15.2}$$

Le vecteur φ_α est le *potentiel vecteur* d'où dérive le champ électromagnétique considéré.

Ce vecteur n'est manifestement défini qu'à un gradient additif près, de telle sorte qu'on peut encore l'astreindre à la condition supplémentaire

$$\nabla_\alpha\varphi^\alpha=0. \tag{15.3}$$

III. — Les conditions de conservation.

16. *Condition de conservation relative aux équations de Maxwell-Lorentz* (14.1). — Désignons par D^λ le vecteur figurant au premier membre des équations de Maxwell (14.1)

$$D^\lambda=\nabla_\alpha F^{\alpha\lambda},$$

et évaluons sa divergence

$$\nabla_\lambda D^\lambda=\nabla_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda}. \tag{16.1}$$

Il résulte d'un théorème classique de la géométrie des espaces de Riemann que l'on a

$$\nabla_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda}=\nabla_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}.$$

On en déduit par échange des indices α et λ

$$\nabla_\lambda D^\lambda=\nabla_{\lambda\alpha}F^{\lambda\alpha}=-\nabla_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda},$$

soit, par comparaison avec l'équation (16.1),

$$\nabla_\lambda D^\lambda=0. \tag{16.2}$$

Le vecteur D^λ est donc conservatif. Il en résulte qu'il en est nécessairement de même pour le vecteur-courant électrique qui figure au second membre des équations (14.1)

$$\nabla_\lambda J^\lambda=0, \tag{16.3}$$

et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Le vecteur-courant électrique J^λ est conservatif.*

Ce théorème traduit dans notre théorie la conservation de l'électricité.

17. *Condition de conservation relative aux équations de Maxwell-Lorentz* (15.1). — Désignons par E^λ la densité vectorielle figurant au premier membre des équations (15.1)

$$E^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_\alpha F_{\beta\gamma},$$

et évaluons sa pseudo-divergence $\partial_\lambda E^\lambda$. Il vient

$$\partial_\lambda E^\lambda = \frac{1}{3}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_{\lambda\alpha} F_{\beta\gamma}, \tag{17.1}$$

soit en échangeant les indices α et λ

$$\partial_\lambda E^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\beta\gamma\alpha}\partial_{\alpha\lambda} F_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_{\lambda\alpha} F_{\beta\gamma}.$$

En comparant avec l'équation (17.1) on obtient la condition de conservation

$$\partial_\lambda E^\lambda = 0, \tag{17.2}$$

qui joue un rôle important dans la théorie des équations de Maxwell-Lorentz.

18. *Les conditions de conservation relatives aux équations d'Einstein.* — Il résulte des identités de Bianchi que le tenseur géométrique $S_{\alpha\beta}$ satisfait aux quatre conditions de conservation

$$\nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0.$$

Il en est par suite de même pour le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ qui vérifie les équations

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0. \tag{18.1}$$

Nous adopterons pour le tenseur $T_{\alpha\beta}$ la forme

$$T_{\alpha\beta} = r u_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta},$$

où u_α désigne le vecteur-vitesse unitaire, r un scalaire positif et $\theta_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique quelconque. Le vecteur u_α étant unitaire, il vient

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \qquad u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 0. \tag{18.2}$$

Avec les notations précédentes, les équations de conservation (18.1) peuvent s'écrire

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha u_\beta) = \nabla_\alpha \theta^\alpha_\beta.$$

Introduisons au lieu du tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ le vecteur K_β défini par les équations

$$\nabla_\alpha \theta_\beta^\alpha = r K_\beta.$$

En tenant compte des équations (18.2) dans les conditions de conservation, on obtient les équations fondamentales

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = r K_\alpha u^\alpha, \tag{18.3}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (g_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta) K_\alpha ; \tag{18.4}$$

(18.3) joue, comme nous le verrons, le rôle d'une équation de continuité; les lignes de courant, lignes tangentes en chacun de leurs points au vecteur-vitesse u^α, seront déterminées par les équations différentielles (18.4).

Dans un travail précédent (¹), j'ai introduit la notion de *milieu holonome* : un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ définit un milieu holonome lorsque le tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ peut être choisi de façon que le vecteur K_α ne dépende que des x^α et dérive d'un potentiel. Examinons ce cas particulier et soit $\log F$ ce potentiel. Les équations (18.4) prennent la forme

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (g_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta) \frac{\partial_\alpha F}{F}$$

et peuvent être interprétées de la manière suivante : les lignes de courant sont des géodésiques de la métrique riemannienne

$$\overline{ds}^2 = F^2 ds^2.$$

Pour un tel milieu, l'équation (18.3) peut s'écrire

$$\nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha r}{r} - \frac{\partial_\alpha F}{F} \right) = 0. \tag{18.5}$$

Lorsque la congruence des lignes de courant est d'expansion nulle, le milieu holonome considéré est dit incompressible. Dans ce cas

$$\nabla_\alpha u^\alpha = 0,$$

et en vertu de (18.5), $\frac{r}{F}$ demeure constant tout le long d'une ligne de courant.

19. *Le vecteur K_α pour un tenseur d'énergie électromagnétique.* — Désignons par

$$\tau_\beta^\alpha = \frac{1}{4} g_\beta^\alpha F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F^{\alpha\lambda} F_{\beta\lambda} \tag{19.1}$$

(¹) LICHNEROWICZ, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Annales de l'École Normale*, 1941, t. 58, fasc. IV).

le tenseur d'énergie associé au champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ et cherchons à évaluer le vecteur correspondant

$$rK_\beta = \nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta.$$

Il vient immédiatement

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu} - F^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} - F_{\beta\lambda} \nabla_\alpha F^{\alpha\lambda}.$$

Or en échangeant les noms des indices α et λ et tenant compte de l'antisymétrie du tenseur $F_{\alpha\beta}$, on obtient

$$F^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = \frac{1}{2} F^{\alpha\lambda} | \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} + \nabla_\lambda F_{\alpha\beta} |,$$

Il résulte par suite des équations de Maxwell (14.2) que l'on a

$$F^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\lambda} \nabla_\beta F_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu}.$$

On en déduit

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = -F_{\beta\lambda} \nabla_\alpha F^{\alpha\lambda},$$

c'est-à-dire d'après l'expression de $\nabla_\alpha F^{\alpha\lambda}$ fournie par les équations de Maxwell (14.1)

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = -F_{\beta\alpha} J^\lambda. \tag{19.2}$$

Nous allons appliquer la formule (19.2) à la formation explicite des conditions de conservation (18.3), (18.4) qui correspondent à des schémas comportant un champ électromagnétique.

20. *Les conditions de conservation pour le schéma champ électromagnétique pur.* — Nous dirons qu'un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ est *normal*, si la densité scalaire associée

$$d = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \tag{20.1}$$

est différente de zéro. Considérons le schéma champ électromagnétique pur associé à un champ électromagnétique normal. Si τ^α_β désigne le tenseur défini par l'équation (19.1), on a pour un tel schéma

$$T^\alpha_\beta = \tau^\alpha_\beta.$$

d'où, en vertu de l'équation (19.2),

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = -F_{\beta\alpha} J^\alpha = 0. \tag{20.2}$$

Or un calcul aisé fournit, pour le déterminant $D(F_{\alpha\beta})$ des composantes $F_{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique, l'expression simple

$$D(F_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{4} d^2 \neq 0.$$

Le système (19.2), qui se présente comme un système de quatre équations linéaires homogènes aux inconnues J^α, n'admet par suite que la solution nulle. Il vient ainsi

$$J^\alpha = 0.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Pour tout schéma champ électromagnétique pur, le vecteur courant électrique est nul.*

21. *Les conditions de conservation pour le schéma matière-champ électromagnétique.* — Considérons un schéma matière-champ électromatique; son tenseur d'énergie peut, d'après l'équation (8.1), être mis sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho^* u_\alpha u_\beta + \tau_{\alpha\beta},$$

où le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ est défini par l'équation (19.1). A ce schéma correspond le vecteur K_β donné par la formule

$$\rho^* K_\beta = - F_{\alpha\beta} J^\alpha. \tag{21.1}$$

Par suite les conditions de conservation (18.3) et (18.4) prennent, dans ce cas, respectivement la forme

$$\nabla_\alpha (\rho^* u^\alpha) = - F_{\alpha\beta} J^\alpha u^\beta, \tag{21.2}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = - \frac{1}{\rho^*} (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) F_{\lambda\alpha} J^\lambda. \tag{21.3}$$

22. *Les conditions de conservation pour le schéma fluide parfait-champ électromagnétique.* — Considérons un schéma fluide parfait-champ électromagnétique dont le tenseur d'énergie peut s'écrire d'après l'équation (10.3)

$$T_{\alpha\beta} = (\rho^* + p^*) u_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta}$$

avec

$$\theta_{\alpha\beta} = p^* g_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}.$$

$T_{\alpha\beta}$ désignant toujours le tenseur symétrique associé à un champ électromagnétique.

A ce schéma correspond le vecteur K_β donné par la formule

$$(\rho^* + p^*) K_\beta = \partial_\beta p^* - F_{\alpha\beta} J^\alpha, \tag{22.1}$$

par suite les conditions de conservation (18.3) et (18.4) peuvent être mises sous la forme

$$\nabla_\alpha [(\rho^* + p^*) u^\alpha] = (\partial_\beta p^* - F_{\alpha\beta} J^\alpha) u^\beta, \tag{22.2}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{1}{\rho^* + p^*} (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta)(\partial_\alpha p^* - F_{\lambda\alpha} J^\lambda). \tag{22.3}$$

Ces dernières conditions de conservation jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'électron avec tensions.

IV. — Le schéma champ électromagnétiqne pur.

23. *Le problème de Cauchy.* — Le problème essentiel de la théorie des espaces-temps induits par un champ électromagnétique pur est en fait le problème de Cauchy relatif au système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz. De ce problème des conditions initiales (Anfangswert-probleme) nous pouvons donner l'énoncé suivant :

Étant donnés sur une hypersurface S *la métrique et les champs gravifique et électromagnétique, déterminer la métrique et les champs correspondants dans tout leur domaine d'existence.*

Donnons-nous donc une hypersurface S orientée d'une manière arbitraire et que nous supposons quatre fois différentiable et deux fois continûment différentiable. Si cette hypersurface est représentée par l'équateur $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$, le paramètre différentiel du premier ordre correspondant $\Delta_1 f$ est le signe quelconque. Nous pouvons toujours effectuer le changement de variables

$$x^{1'} = x^1, \qquad x^{2'} = x^2, \qquad x^{3'} = x^3, \qquad x^{4'} = f(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

et nous ramener ainsi au cas où S est définie par l'équation $x^4 = 0$ et admet pour paramètre différentiel $\Delta_1 x^4 = g^{44}$. Sur l'hypersurface S, nous nous donnons les valeurs des potentiels, de gravitation $g_{\alpha\beta}$ qui définissent la métrique, celles des dérivées premières $\partial_1 g_{\alpha\beta}$ (dérivées d'indice 1 relativement à S) qui définissent avec les $g_{\alpha\beta}$ le champ de gravitation, et enfin les valeurs des composantes $F_{\alpha\beta}$, du champ électromagnétique. Les vingt fonctions $g_{\alpha\beta}$, $\partial_1 g_{\alpha\beta}$ et les six fonctions $F_{\alpha\beta}$ constituent, pour le problème posé, les données de Cauchy relatives à S. Nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S des dérivées successives du champ de gravitation et du champ électromagnétique. L'étude des discontinuités à la traversée de S et, du moins dans le cas analytique, celle de l'existence et de l'unicité des solutions (1) en résultera immédiatement.

24. *Les discontinuités des dérivées des champs.* — Les seules dérivées qui puissent être discontinues à la traversée de S sont les dérivées $\partial_{11} g_{\alpha\beta}$ et $\partial_1 F_{\alpha\beta}$ (dérivées obliques sur S). Une simple dérivation sur S fournit les valeurs de toutes les autres dérivées des deux champs. Il nous faut donc mettre en évidence ces dérivées dans les équations d'Einstein et dans celles de Mawell-Lorentz.

---

(1) L'unicité dans le cas non analytique a été établie par Stellmacher pour des hypersurfaces exclusivement orientées dans l'espace (*Math. Annalen*, t. 115, 1937, pp. 136-152).

On sait (¹) qu'à ce point de vue les équations d'Einstein du cas intérieur

$$Q_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta} = 0 \tag{24.1}$$

peuvent être partagées en deux systèmes distincts. *Lorsque g^{44} est différent de zéro*, le système (24.1) est équivalent à l'ensemble d'un système de six équations

$$Q_{ij} \equiv S_{ij} - \chi\left[\frac{1}{4} g_{ij}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) - g^{\alpha\beta}F_{\alpha i}F_{\beta j}\right] = 0, \tag{24.2}$$

et d'un système de quatre équations

$$Q_i^4 \equiv S_i^4 + \chi F_{ij}F^{4j} = 0, \tag{24.3a}$$

$$Q_4^4 \equiv S_4^4 - \chi\left[\frac{1}{4}(F_{ij}F^{ij}) - \frac{1}{2}F_{4i}F^{4i}\right] = 0. \tag{24.3b}$$

Il est connu que les seules dérivées obliques qui figurent dans le système (24.2) sont les dérivées $\partial_{44} g_{ij}$ et que, sous l'hypothèse essentielle $g^{44} \neq 0$, les équations du système sont résolubles par rapport à ces six dérivées. Dans les équations (24.3) n'entre au contraire aucune dérivée oblique.

De même, lorsque g^{44} n'est pas nul, le premier système des équations de Maxwell qui s'écrit ici

$$D_\alpha \equiv g^{\beta\gamma}\nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \tag{24.4}$$

est équivalent à l'ensemble du système

$$D_i \equiv g^{44}\partial_4 F_{4i} + g^{4k}\partial_4 F_{ki} + \Phi_i(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}, \partial_k F_{\alpha\beta}) = 0, \tag{24.5}$$

où les fonctions Φ_i ont par conséquent sur S des valeurs connues, et de l'équation

$$D^4 \equiv g^{i\alpha}g^{j\beta}\nabla_i F_{\alpha\beta} = 0, \tag{24.6}$$

où n'entre aucune dérivée oblique.

Enfin le second système des équations de Maxwell se partage en le système de trois équations

$$E^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma i}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0, \tag{24.7}$$

où entrent les dérivées obliques $\partial_4 F_{jk}$ et l'équation unique

$$E^4 \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkh}\partial_j F_{kh} = 0, \tag{24.8}$$

qui ne renferme aucune dérivée oblique.

(¹) *Cf.* LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste* (*Actual. scient. ind.*, Hermann, n° 833, 1939, pp. 15 et 27-29).

Il résulte des équations (24.2), (24.5), (24.7) que les *dérivées du champ de gravitation et du champ électromagnétique sont nécessairement continues à la traversée de toute hypersurface* S *pour laquelle* g^{44} *est différent de zéro.* En effet les équations (24.2) fournissent les valeurs sur S des six dérivées $\partial_{44} g_{ij}$ et l'on sait que l'on peut toujours annuler les discontinuités éventuelles des dérivées $\partial_{44} g_{\alpha 4}$. D'autre part les équations (24.7) fournissent les valeurs sur S des dérivées $\partial_4 F_{jk}$, et l'on déduit enfin des équations (24.5) celles des dérivées $\partial_4 F_{4i}$.

La conclusion précédente s'étend aux dérivées d'ordre supérieur des deux champs : il suffit pour s'en rendre compte de dériver les équations (24.2), (24.5), (24.7) par rapport à la variable x^4. Au total la présente étude ne fait intervenir que ces équations à l'exclusion des équations (24.3), (24.6), (24.8).

Si la variété S est telle que g^{44} soit identiquement nul, les dérivées du champ de gravitation et du champ électromagnétique peuvent au contraire être discontinues à la traversée de S. Nous pouvons, par suite, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il y a identité entre les variétés caractéristiques des équations d'Einstein et celles des équations de Maxwell-Lorentz. Ces variétés sont les solutions de l'équation*

$$\Delta_1 f = 0.$$

Nous retrouvons ainsi, sous une forme absolument rigoureuse, l'identité des ondes gravifiques et des ondes électromagnétiques et, par suite, l'identité des lois de propagation des deux champs.

25. *Théorème d'existence et d'unicité.* — L'étude précédente nous conduit à partager le système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz en deux systèmes distincts :

a. Le système des équations (24.2), (24.5), (24.7) qui détermine l'évolution des champs de gravitation et électromagnétique. Il sera désigné dans la suite par la notation système (E).

b. Le système des équations (24.3), (24.6), (24.8) où n'entre aucune dérivée oblique des champs. Il sera désigné dans la suite par la notation système (C).

Sur la variété S donnons-nous des données de Cauchy telles que, sur S, g^{44} soit différent de zéro. Dans le cas analytique, le théorème de Cauchy-Kovalewska nous assure que ces données déterminent, à un changement de variables près, une solution unique $g_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$ du système (E), solution dont nous connaissons le développement selon les puissances de x^4.

Il nous faut encore satisfaire au système (C). Les équations de ce système ne contenant aucune dérivée oblique des données de Cauchy, ces données sont

nécessairement astreintes à vérifier *sur la variété* S, les équations du système (C). Le théorème suivant lèvera alors toute difficulté.

THÉORÈME. — *Si une solution du système* (E) *satisfait sur l'hypersurface* S *aux équations du système* (C), *elle satisfait à ces équations dans tout le domaine d'espace-temps considéré.*

Ce théorème est une conséquence des conditions de conservation relatives aux systèmes d'Einstein et de Maxwell-Lorentz et établies antérieurement. En effet, pour toute solution de (24.7), la condition de conservation (17.2) se réduit à l'équation

$$\partial_i \mathrm{E}^i = 0 ;$$

par suite si l'équation (24.8) est vérifiée sur S, elle est vérifiée dans tout le domaine d'existence des champs considérés. De même, pour toute solution de (24.5), la condition de conservation (16.2) se réduit à l'équation

$$\partial_i \mathrm{D}^i = -\partial_i \left(\frac{g^{4}}{g^{ii}} \mathrm{D}^i \right) - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} \frac{g^{\mu i}}{g^{ii}} \mathrm{D}^i .$$

Cette équation considérée comme équation aux dérivées partielles en D^i est linéaire et homogène et est résolue par rapport à la dérivée $\partial_i \mathrm{D}^i$. Pour D^i nul sur S, elle n'admet donc pas d'autre solution que la solution nulle. Il en résulte que l'équation (24.6) est, elle aussi, satisfaite dans tout le domaine d'espace-temps considéré.

Les équations (24.5) et (24.6) étant satisfaites, J^{β} est nul et le tenseur $\mathrm{T}^{\beta}_{\alpha}$ est conservatif. Il en est par suite de même du tenseur $\mathrm{Q}^{\beta}_{\alpha} = \mathrm{S}^{\beta}_{\alpha} - \chi \mathrm{T}^{\beta}_{\alpha}$, et il vient

$$\nabla_{\alpha} \mathrm{Q}^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{25.1}$$

Pour toute solution de (24.2) on a, par un calcul facile,

$$\mathrm{Q}^{\beta}_{i} = \frac{g^{\beta i}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{i} ; \qquad \mathrm{Q}^{\beta}_{4} = \frac{g^{\beta i}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{4} + \frac{g^{\beta i} g^{4i} - g^{i\beta} g^{ii}}{(g^{ii})^2} \mathrm{Q}^{i}_{i},$$

et les conditions (25.1) prennent la forme

$$\begin{aligned} \alpha = i : \quad \partial_4 \mathrm{Q}^{i}_{i} = {} & \partial_k \left(\frac{g^{ki}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{k}_{i} \right) - \Gamma^{\beta}_{\beta p} \frac{g^{pi}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{i} \\ & + \frac{1}{g^{ii}} \left[\Gamma^{k}_{\beta i} g^{\beta i} + \Gamma^{k}_{ji} \frac{g^{ji} g^{ki} - g^{ii} g^{jk}}{g^{ii}} \right] \mathrm{Q}^{i}_{k} + \Gamma^{i}_{\beta i} \frac{g^{\beta 4}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{i}, \\ \alpha = 4 : \quad \partial_4 \mathrm{Q}^{i}_{4} = {} & \partial_k \left(\frac{g^{kj}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{4} \right) - \partial_j \left[\frac{g^{ik} g^{ji} - g^{ij} g^{ik}}{(g^{ii})^2} \mathrm{Q}^{i}_{k} \right] \\ & - \Gamma^{i}_{i\beta} \left[\frac{g^{\beta i}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{i} + \frac{g^{\beta j} g^{4i} - g^{i\beta} g^{4j}}{(g^{ii})^2} \mathrm{Q}^{i}_{j} \right] + \Gamma^{k}_{i\beta} \frac{g^{\beta i}}{g^{ii}} \mathrm{Q}^{i}_{k}. \end{aligned}$$

Pour toute solution de (24.2), les Q^{β}_{i} vérifient donc un système de quatre équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes, résolues par rapport

aux dérivées $\partial_4 Q_j^i$. Pour des données nulles sur S, ce système n'admet par suite que la solution nulle et les équations (24.3) sont satisfaites dans tout le domaine d'espace-temps considéré, ce qui démontre le théorème énoncé.

Nous pouvons résumer toute cette étude par le théorème d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME. — *Pourvu que les données de Cauchy satisfassent, sur la variété* S, *aux équations du système* (C) *et soient telles que, sur* S, g^{44} *soit différent de zéro, le système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz correspondant au schéma champ électromagnétique pur admet dans le cas analytique une solution unique.*

26. *Le système des conditions initiales.* — Le problème de l'intégration des équations relativistes de l'électromagnétisme se trouve donc ramené au problème suivant : trouver les systèmes de données de Cauchy $(g_{\alpha\beta}, \partial_4 g_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta})$, ou « conditions initiales » satisfaisant aux six équations du système (C) :

$$(C)\qquad \begin{cases} Q_i^4 \equiv S_i^4 + \chi F_{ij} F^{4j} = 0, \\ Q_4^4 \equiv S_4^4 - \chi\left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{4i} F^{4i}\right] = 0, \\ D^4 \equiv g^{ix} g^{4\beta} \nabla_i F_{\alpha\beta} = 0, \\ E^4 \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{jkh4} \partial_j F_{kh} = 0. \end{cases}$$

Le système (C) sera dit le système des conditions initiales pour les deux champs. Je reviendrai ultérieurement sur la théorie de ce système qui peut se développer d'une manière assez analogue à celle que j'ai donnée (1) pour le système des conditions initiales associé aux équations d'Einstein du cas extérieur.

27. *Les singularités du champ de gravitation.* — J'ai consacré une partie d'un travail récent (2) à l'étude des champs de gravitation qui sont tels que l'on ne puisse introduire de masses matérielles dans un champ extérieur donné que dans des domaines où ce champ admet préalablement des singularités. J'ai en particulier établi la proposition suivante :

Étant donné un champ de gravitation extérieur statique du type le plus général, tout tube d'univers de ce champ, qui peut être meublé par une distribution matérielle du schéma fluide parfait produisant un champ intérieur statique compatible avec le champ extérieur, contient nécessairement des singularités du champ de gravitation extérieur.

---

(1) Cf. *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des corps* (sous presse *au Journal de Mathématiques pures et appliquées*).

(2) Cf. *Problèmes globaux en Mécanique relativiste*, 1939, Chapitre III.

Je me propose, dans les paragraphes qui vont suivre, d'étendre cette proposition au cas où la distribution purement matérielle considérée est remplacée par une distribution comportant un champ électromagnétique. Je développerai le raisonnement dans le cas le plus intéressant au point de vue physique, celui où la distribution considérée correspond au schéma champ électromagnétique pur.

28. *Signe de la composante* T_4^4 *du tenseur d'énergie.* — Dans tout ce qui suit on désignera par x^4 celle des variables qui présente le caractère temporel. D'après une remarque classique de Hilbert (1) complétée par l'auteur (2), cela signifie que les deux potentiels g_{44} et g^{44} sont positifs et que par suite les deux formes quadratiques

$$g^{ij}X_iX_j, \quad g_{ij}X^iX^j$$

sont définies négatives. Les lignes le long desquelles la variable x^4 varie seule sont dites lignes de temps, les hypersurfaces $x^4 = \text{const.}$ sections d'espace.

Cela étant posé, la méthode utilise essentiellement le signe de la composante T_4^4 du tenseur d'énergie

$$T_4^4 = \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}F_{4i}F^{4i}.$$

En exprimant par exemple en fonction des composantes covariantes toutes les composantes du tenseur champ électromagnétique, il vient

$$T_4^4 = \frac{1}{4}g^{ih}g^{jk}F_{ij}F_{hk} - \frac{1}{2}(g^{44}g^{ij} - g^{4i}g^{4j})F_{4i}F_{4j}.$$

Or, en vertu du caractère temporel de la variable x^4, la quantité

$$H^2 = g^{ih}g^{jk}F_{ij}F_{hk},$$

carré de la mesure du « champ magnétique » F_{ij}, est strictement positive. De même du caractère temporel de x^4, on déduit encore que la forme quadratique de coefficients $(g^{44}g^{ij} - g^{4i}g^{4j})$ est définie négative et que, par suite, la quantité

$$L^2 = (g^{44}g^{ij} - g^{4i}g^{4j})F_{4i}F_{4j}$$

est aussi strictement positive. Il en résulte

$$T_4^4 = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}L^2 > 0.$$

29. *Existence des singularités du champ de gravitation dans le cas statique.* — Supposons tout d'abord que nous nous donnions un espace-temps *statique*

(1) HILBERT, *Math. Annalen*, 92, p. 11-12.
(2) Cf. *Problèmes globaux*, etc., 1939, p. 23-24.

associé à un schéma champ électromagnétique pur et étudions, pour un certain choix de l'hypersurface frontière, quel champ extérieur on peut lui associer.

Nous admettons qu'à la traversée de S et dans le système de coordonnées de Gauss associé à cette variété, la métrique, le champ de gravitation et le champ électromagnétique sont continus. Il en résulte que, nécessairement, sur l'hypersurface frontière S, le champ électromagnétique doit s'annuler. D'autre part le caractère statique de l'espace temps intérieur ne correspondra à aucune réalité physique, si les lignes de temps, trajectoires du groupe d'isométrie de l'espace-temps sont susceptibles de sortir du tube d'univers auquel nous limitons cet espace-temps. L'hypersurface S sera par suite supposée engendrée par des lignes de temps.

Ayant ainsi choisi l'hypersurface S limitant l'espace-temps intérieur, il est facile de déterminer l'espace-temps extérieur associé, soit (x^1, x^2, x^3, x^4) un système de coordonnées de Gauss associé à S, où x^3 désigne la distance géodésique normale à S et où S est par suite représentée par l'équation $x^3 = 0$. Avec ces coordonnées, la donnée de l'espace-temps intérieur nous fait connaître pour l'espace temps extérieur cherché un système de données de Cauchy $(g_{\alpha\beta}, \partial_3 g_{\alpha\beta})$ portées par S qui demeure invariant par un groupe de la forme

$$\overline{x}^i = x^i - h.$$

Ces données déterminent un espace-temps extérieur et un seul qui admet par suite le même groupe. L'espace-temps considéré est donc nécessairement statique et les lignes de temps qui lui correspondent se déduisent de celles qui engendrent S par la construction même de Gauss.

Inversement, supposons que nous nous donnions un espace-temps extérieur statique du type le plus général, rapporté à ses lignes de temps et à des sections d'espace correspondantes, et considérons dans cet espace-temps un tube d'univers limité à une hypersurface S engendrée par des lignes de temps. Nous nous proposons de montrer que si ce tube d'univers peut être meublé par une distribution purement électromagnétique produisant un espace-temps intérieur statique, l'espace-temps extérieur donné est nécessairement singulier à l'intérieur de S. A cet effet, nous utiliserons (1) essentiellement le fait que, dans le cas statique général, il existe un vecteur d'espace

$$h^i = -g^{i\mu}\Gamma^k_{k\mu}; \qquad h^4 = 0,$$

dont la divergence est égale à R^k_k. Par suite si Σ désigne une hypersurface fermée limitant un volume V, dans lequel l'espace-temps considéré est régulier, on a

$$\text{flux}_{\Sigma}\vec{h} = \int\int\int\int_V R^k_k \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \tag{29.1}$$

(1) Cf. *Problèmes globaux*, etc., 1939, p. 64-65.

Le vecteur $\vec{h}$ introduit ne dépend que des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières. Une étude de raccordement des deux espaces-temps permet d'en déduire que le long de S les vecteurs $\vec{h}$ attachés à l'espace-temps intérieur et à l'espace-temps extérieur coïncident.

30. Ces résultats étant rappelés, la démonstration cherchée s'en déduit aisément. Soient Σ_e et Σ'_e deux sections d'espace arbitraires de l'espace-temps extérieur, Σ_i et Σ'_i les deux sections d'espace de l'espace-temps intérieur qui se raccordent avec les précédentes le long de la paroi S du tube d'univers. Nous désignerons par D le domaine à trois dimensions déterminé sur S par l'un ou l'autre groupe des sections d'espace, et nous appellerons V_e et V_i les deux hypervolumes limités respectivement à D.

Appliquons à l'hypervolume V_i l'équation (29.1) dans le cas de l'espace-temps intérieur, T étant nul, la composante R^4_4 du tenseur de Ricci est égale à T^4_4, D'autre part le flux de $\vec{h}$ à travers les sections d'espace Σ_i et Σ'_i est nul. L'équation considérée prend donc la forme

$$\text{flux}_D \vec{h} = \int\int\int\int_{V_i} T^4_4 \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

où T^4_4 est une quantité essentiellement positive. Par suite le flux à travers D du vecteur $\vec{h}$ est positif et ne peut, en aucun cas, se réduire à zéro. Or, si le champ extérieur considéré était régulier dans V_e, le même raisonnement, appliqué à l'espace-temps extérieur et à l'hypervolume V_e correspondant, conduirait à la relation

$$\text{flux}_D \vec{h} = 0.$$

Ainsi l'espace-temps extérieur ne peut être supposé régulier dans le domaine V_e, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un champ de gravitation extérieur statique du type le plus général, tout tube d'univers de ce champ qui peut être meublé par une distribution purement électromagnétique produisant un champ intérieur statique compatible avec le champ extérieur, contient nécessairement des singularités du champ de gravitation extérieur* (1).

V. — L'équation de transfert de Lorentz.

31. *L'équation de transfert de Lorentz.* — Hors le cas d'une distribution purement électromagnétique, les équations fondamentales de l'électricité

(1) J'ai annoncé antérieurement ce résultat dans une Note aux *Comptes rendus*, (Cf. *C. R. Acad. Sc.*, 1939, t. 209, p. 533).

données à la partie II du présent travail, demeurent incomplètes tant que l'on ne connaît pas une expression du vecteur-courant électrique J^λ. Nous allons compléter ces équations qui, jusqu'ici, ne font pas intervenir l'hypothèse électronique, par une équation supplémentaire portant sur le vecteur-courant et qui traduit explicitement cette hypothèse. Dans la « théorie microscopique rigoureuse » que nous envisageons, tout courant électrique doit être nécessairement un courant de convection. Autrement dit le vecteur-courant électrique J^λ doit être colinéaire au vecteur-vitesse matérielle unitaire u^λ. Nous sommes ainsi conduits de la manière la plus naturelle à adjoindre aux équations d'Einstein et de Maxwell l'équation

$$J^\lambda = \mu u^\lambda. \tag{31.1}$$

où μ désigne un scalaire variable appelé *densité de charge électrique*. A l'équation (31.1) on donne le nom d'équation de transfert de Lorentz.

32. *La densité de charge pour le schéma matière-champ électromagnétique.* — Prenons d'abord le cas d'un schéma matière-champ électromagnétique. Grâce à l'équation de transfert (31.1), les conditions de conservation (16.3), (21.2), (21.3) relatives aux équations de Maxwell et d'Einstein prennent une forme particulièrement simple.

On a d'abord pour l'équation (16.3)

$$\nabla_\lambda (\mu u^\lambda) = 0. \tag{32.1}$$

En reportant l'expression (31.1) du vecteur-courant dans le second membre de l'équation (21.2), on obtient pour ce second membre

$$\mu F_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta,$$

expression qui est nulle par suite de l'antisymétrie du tenseur $F_{\alpha\beta}$. L'équation (21.2) se réduit ainsi à l'équation

$$\nabla_\lambda (\rho^* u^\lambda) = 0. \tag{32.2}$$

Les équations (32.1) et (32.2) peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\lambda u^\lambda + u^\lambda \dfrac{\partial_\lambda \rho^*}{\rho^*} = 0, \\ \nabla_\lambda u^\lambda + u^\lambda \dfrac{\partial_\lambda \mu}{\mu} = 0. \end{array} \right. \tag{32.2}$$

Par soustraction, on en déduit l'équation

$$u^\lambda \partial_\lambda \left(\log \frac{\mu}{\rho^*} \right) = 0,$$

qui exprime que le rapport $\frac{\mu}{\rho^*}$ demeure constant tout le long d'une ligne de courant. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème. — *Le rapport de la densité de charge électrique à la densité de matière* ρ^* *demeure constant le long d'une ligne de courant.*

En général la quantité $K = \frac{\mu}{\rho^*}$ varie d'une ligne de courant à l'autre et le schéma considéré est dit *hétérogène*. Nous dirons que le schéma est *homogène* si K est une constante absolue dans tout le domaine d'espace-temps considéré.

Enfin le système différentiel aux lignes de courant (21.3) peut être écrit sous la forme

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = K F_{\alpha\beta} u^\alpha. \tag{32.4}$$

33. *La densité de charge pour le schéma fluide parfait-champ électromagnétique.* — Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un schéma fluide parfait-champ électromagnétique à pression constante : la pression p^* est supposée constante le long de toute ligne de courant

$$u^\lambda \partial_\lambda p^* = 0. \tag{33.1}$$

En tenant compte de l'équation de transfert et de l'équation (33.1), les équations de conservation (16.3) et (22.2) prennent respectivement la forme

$$\nabla_\lambda (\mu u^\lambda) = 0, \qquad \nabla_\lambda [(\rho^* + p^*) u^\lambda] = 0.$$

On en déduit comme précédemment que, le long de toute ligne de courant, le rapport $K = \frac{\mu}{\rho^* + p^*}$ est constant. Le schéma est encore dit *homogène* si K est constant dans tout le domaine d'espace-temps envisagé.

Quant au système différentiel aux lignes de courant (22.3), il peut être mis sous la forme

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial_\beta p^*}{\rho^* + p^*} + K F_{\alpha\beta} u^\alpha. \tag{33.2}$$

34. *Cas où la congruence des lignes de courant est d'expansion nulle.* — Si la congruence des lignes de courant est d'expansion nulle, on a, par définition,

$$\nabla_\lambda u^\lambda = 0.$$

Plaçons-nous dans le cas d'un schéma matière-champ électromagnétique : les équations (32.3) prennent la forme

$$u^\lambda \partial_\lambda \rho^* = 0, \qquad u^\lambda \partial_\lambda \mu = 0.$$

Par suite les densités de masse et de charge électrique demeurent toutes deux constantes le long d'une ligne de courant. Ces résultats s'étendent immédiatement à un schéma quelconque du type fluide parfait-champ électromagnétique.

35. *Le problème de Cauchy pour une distribution mixte.* — Proposons-nous d'étudier ce que devient le problème de Cauchy dans le cas de champs gravifique et électromagnétique produits par une distribution mixte, matérielle et électromagnétique. Nous raisonnerons dans les hypothèses du schéma matière champ électromagnétique.

Par extension de l'équation (24.1) posons

$$Q_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi \tau_{\alpha\beta},$$

où $\tau_{\alpha\beta}$ désigne la partie du tenseur d'énergie associée au champ électromagnétique.

Les équations d'Einstein s'écrivent

$$Q_{\alpha\beta} = \chi \rho^* u_\alpha u_\beta \qquad \text{avec} \quad g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1 \qquad (\rho^* > 0), \tag{35.1}$$

et les équations de Maxwell-Lorentz

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = \mu u_\lambda, \tag{35.2}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0. \tag{35.3}$$

Étant données sur une hypersurface S. les valeurs des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et φ_α et de leurs dérivées premières qui déterminent les champs, nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S des dérivées successives de ces potentiels ainsi que les valeurs de ρ^*, μ, des u_α et de leurs dérivées. Comme au paragraphe 24, nous supposerons que l'hypersurface S est définie par l'équation $x^4 = 0$ et qu'elle n'est tangente en aucun de ses points au cône élémentaire ($g^{44} \neq 0$). Dans ces conditions, le système (35.1) est équivalent au système des équations

$$Q_{ij} = \chi \rho^* u_i u_j, \tag{35.4}$$

$$Q^4_\lambda = \chi \rho^* u_\lambda u^4, \tag{35.5}$$

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1; \qquad \rho^* > 0. \tag{35.6}$$

Les quantités Q^4_λ ne contenant aucune dérivée oblique des champs, les données de Cauchy déterminent les valeurs sur S de ces quantités. On tire ainsi des équations (35.5)

$$u_\lambda = \frac{Q^4_\lambda}{\chi \rho^* u^4},$$

et en reportant dans (35.6)

$$(\chi \rho^* u^4)^2 = g^{\alpha\beta} Q^4_\alpha Q^4_\beta.$$

Nous supposons que la quantité $g^{\alpha\beta} Q^4_\alpha Q^4_\beta$ est sur S essentiellement positive. Il vient dans ces conditions en posant

$$g^{\alpha\beta} Q^4_\alpha Q^4_\beta = P^2,$$

$$u_\lambda = \frac{Q^4_\lambda}{P}; \qquad u^4 = \frac{Q^{44}}{P}; \qquad \chi \rho^* = \frac{P^2}{Q^{44}}, \tag{35.7}$$

ρ étant positif, *nous sommes amenés à supposer* $Q^{\alpha\lambda}$ *positif*. Les valeurs de ρ^* et des u_λ étant connues, les équations (35.4) nous fournissent alors les valeurs sur S des dérivés $\partial_{\alpha\lambda} g_{ij}$.

Passons maintenant aux équations de Maxwell (35.2). Elles peuvent se mettre sous la forme

$$g^{\alpha\lambda}\partial_{\alpha\lambda}\varphi_i = \mu u_i - \xi_i, \tag{35.8}$$

$$-g^{\alpha\lambda}\partial_{\alpha\lambda}\varphi_i = \mu u_\lambda - \xi_\lambda, \tag{35.9}$$

où ξ_λ désigne un vecteur dont les composantes ont sur S des valeurs connues. De (35.9) on déduit que l'on connaît la valeur sur S de la quantité

$$\mu u^\lambda = \xi^\lambda,$$

soit

$$\mu = \frac{\xi^\lambda}{u^\lambda} = \frac{\xi^\lambda P}{Q^{\alpha\lambda}}.$$

Connaissant μ, les équations (35.8) fournissent les valeurs sur S des $\partial_{\alpha\lambda}\varphi_i$. Quant aux équations (35.3) elles se trouvent satisfaites d'elles-mêmes grâce à l'emploi du potentiel-vecteur.

Observons, d'autre part, que nos inconnues doivent satisfaire aux conditions de conservations (32.1) et (32.4) que nous écrirons ici sous la forme

$$u^\alpha \partial_\alpha u^\lambda = A^\lambda\left(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}, u^\alpha, \partial_\iota u^\alpha, \frac{\mu}{\rho^*}\right), \tag{35.10}$$

$$u^\alpha \partial_\alpha \rho^* + \rho^* \partial_\alpha u^\alpha = B(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, u^\alpha, \partial_\iota u^\alpha, \rho^*, \partial_\iota \rho^*), \tag{35.11}$$

$$u^\alpha \partial_\alpha \mu + \mu \partial_\alpha u^\alpha = C(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, u^\alpha, \partial_\iota u^\alpha, \mu, \partial_\iota \mu). \tag{35.12}$$

Les seconds membres prennent sur S des valeurs connues; u^α étant différent de zéro (puisque $Q^{\alpha\lambda}$ est différent de zéro les équations (35.10), (35.11), (35.12) fournissent les valeurs des dérivées $\partial_\alpha u^\lambda$, $\partial_\alpha \rho^*$, $\partial_\alpha \mu$.

Cela étant posé, il apparaît immédiatement que des dérivations successives par rapport à la variable x^α, effectuées soit sur le système (35.4), (35.8) et l'équation supplémentaire (15.3), soit sur le système (35.10), (35.11), (35.12), permettent d'obtenir les valeurs de toutes les dérivées cherchées. Dans cette recherche n'intervient aucune dérivation portant sur les équations (35.5), (35.6), (35.9).

Au point de vue de l'existence et de l'unicité de la solution, les considérations précédentes nous permettent d'affirmer du moins dans le cas analytique que, moyennant les hypothèses énoncées, les données de Cauchy sur S déterminent une solution et une seule du système (35.4), (35.8) et (35.10), (35.11), (35.12) qui satisfasse sur S aux équations (35.5), (35.6), (35.9). Il résulte de la théorie des systèmes en involution que ces dernières équations sont alors vérifiées partout. Par suite, dans les hypothèses énoncées, le

problème de Cauchy relatif au système (35.1), (35.2), (35.3) admet une solution unique.

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Si les données de Cauchy sur* S *sont telles que* g^{44} *soit différent de zéro et que* $g^{\lambda\mu}Q^{\lambda}_{\lambda}Q^{\lambda}_{\mu}$ *et* Q^{44} *soient positifs, le système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz* (35.1), (35.2), (35.3) *admet une solution unique se réduisant sur* S *à ces données.*

Le cas où Q^{44} est nul correspond au cas singulier où u^4 est nul, c'est-à-dire au cas où S est tangente à une ligne de courant ou engendrée par des lignes de courant.

Dans le cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique, le problème de Cauchy conduit à des conclusions analogues; il apparait une nouvelle classe de variétés exceptionnelles constituée par les fronts d'onde de l'hydrodynamique.

36. *Les singularités du champ électromagnétique.* — A l'intérieur d'un tube d'univers S, considérons une distribution mixte, matérielle et électromagnétique satisfaisant à l'équation de transfert de Lorentz et proposons-nous tout d'abord d'étudier les champs gravifique et électromagnétique engendrés à l'extérieur de S par cette distribution. Par extension des conditions classiques de Schwarzschild, nous sommes conduits à leur imposer les conditions suivantes : *il existe un système de coordonnées tel que les potentiels* $g_{\alpha\beta}$ *et* φ_α *ainsi que leurs dérivées premières soient continus à la traversée de la variété* S (1).

Nous sommes ainsi amenés à rechercher s'il existe des champs gravifique et électromagnétique satisfaisant aux équations du schéma champ électromagnétique pur et se raccordant le long de S, au sens précédent, avec les champs intérieurs à S associés à la distribution. Nous dirons que nous traitons le problème électromagnétique du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur.

THÉORÈME. — *Pour que le problème électromagnétique du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur admette une solution unique, il faut et il suffit :*

1° *que la variété* S *soit engendrée par des lignes de courant du champ intérieur :*

2° *que dans le cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique, la pression* p^* *s'annule le long de* S.

La condition est nécessaire. — Supposons qu'il existe des champs gravifique et électromagnétique correspondant au schéma électromagnétique pur, exté-

(1) Il en résulte comme dans le cas purement gravitationnel, qu'il y a nécessairement continuité des potentiels et de leurs dérivées premières dans le système de coordonnées de Gauss relatif à S (*Cf.* LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste*, p. 32-33).

rieurs à S et se raccordant le long de S (défini par $x^4 = 0$) avec les champs intérieurs. Les premiers membres des équations du système (C) étant continus à la traversée de S, les quantités Q_i^4, D^4, E^4 relatives aux champs intérieurs s'annulent nécessairement sur S. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que u^4 et p^*, dans le schéma fluide parfait-champ électromagnétique, prennent partout sur S la valeur zéro.

La condition est suffisante. — L'hypersurface S étant supposée engendrée par des lignes de courant est partout orientée dans le temps. Par suite si nous raisonnons dans le système de coordonnées de Gauss attaché à S, nous nous trouvons ramenés à la résolution du problème de Cauchy relatif au schéma champ électromagnétique pur, les données de Cauchy étant portées par une variété non tangente au cône élémentaire et vérifiant sur S les équations du système (C). Nous avons vu qu'un tel problème admet, au moins dans le cas analytique, une solution unique, l'existence de cette solution n'étant d'ailleurs assurée que dans un certain voisinage de S.

37. Inversement donnons-nous, dans un espace-temps rapporté à un système de coordonnées (x^α), des champs gravifique et électromagnétique satisfaisant aux équations du schéma champ électromagnétique pur, le champ gravifique étant supposé partout régulier dans l'espace. Étant donné un tube d'univers limité à une hypersurface S $(x^3 = 0)$, supposons que l'on puisse meubler ce tube d'univers par une distribution matérielle et électromagnétique, *dont la densité de charge est de signe constant* et qui produit à l'intérieur de S des champs compatibles avec les champs extérieurs à S. Nous nous proposons de montrer que, dans ces conditions, le champ électromagnétique *extérieur* ne peut être supposé régulier à l'intérieur de S.

A cet effet nous commencerons par observer que l'on peut mettre les équations de Maxwell-Lorentz (14.1) sous la forme

$$\nabla_\alpha F^{\alpha(\beta)} = \mu u^\beta,$$

où l'indice β du premier membre est un indice mort, c'est-à-dire n'est pas soumis à l'opérateur de dérivation covariante. Pour $\beta = 4$, il vient

$$\nabla_\alpha k^\alpha = \mu u^4,$$

où k^α désigne le vecteur d'espace

$$k^i = F^{i4}, \qquad k^4 = 0.$$

Par suite si H désigne une hypersurface fermée limitant un hypervolume V dans lequel les champs considérés sont réguliers

$$\text{flux}_H \vec{h} = \int\int\int\int_V \mu u^4 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4. \tag{37.1}$$

Soit alors $\Sigma(x^1 = 0)$ une hypersurface orientée dans l'espace et telle que dans le domaine de Σ intérieur à S *la densité de charge* μ *ait un signe constant.* On peut toujours trouver une section d'espace $\Sigma'(x^1 = h)$ telle que, dans l'hypervolume V limité par S, Σ et Σ', le scalaire μ garde un signe constant. D'ailleurs, d'après les résultats du paragraphe 32, μ admet un signe constant le long de toute ligne de courant. Les sections d'espace, correspondant aux valeurs de x^1 de l'intervalle $(0, h)$ étant orientées dans l'espace, ne peuvent être tangentes à une ligne de courant. Par suite dans l'hypervolume V, u^1 conserve aussi un signe déterminé. Désignons par D le domaine à trois dimensions déterminé sur S par Σ et Σ' et appliquons à l'hypervolume V l'équation (37.1). Le flux de $\vec{k}$ à travers Σ et Σ' étant nul, il vient

$$\text{flux}_D \vec{k} = \int\int\int\int_V \mu u^1 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4. \tag{37.2}$$

Ce flux a par suite un signe bien déterminé et ne peut se réduire à zéro. Or, le long de S les vecteurs $\vec{k}$ associés aux champs électromagnétiques extérieur et intérieur à S coïncident. Si le champ électromagnétique extérieur était régulier dans V, le raisonnement précédent, appliqué aux champs extérieurs, conduirait à la relation

$$\text{flux}_D \vec{k} = 0,$$

résultat en contradiction avec (37.2). Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Étant donnés des champs gravifique et électromagnétique satisfaisant aux équations du schéma champ électromagnétique pur, tout tube d'univers, dans lequel la métrique est régulière et qui peut être meublé par une distribution matérielle et électromagnétique de signe constant produisant des champs intérieurs compatibles avec les champs extérieurs donnés, contient nécessairement des singularités du champ électromagnétique extérieur.*

VI. — Sur l'invariant intégral de l'Électromagnétisme.

38. *Variation de l'intégrale* Φ. — Nous raisonnerons tout d'abord dans le cas du schéma matière-champ électromagnétique; nous verrons ultérieurement comment les résultats obtenus s'étendent au cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique à pression constante.

Plaçons-nous donc dans un domaine dans lequel se trouve défini un schéma matière-champ électromagnétique *homogène* et supposons tracée, dans ce domaine, une courbe C le long de laquelle les x^α sont des fonctions d'un certain paramètre u dont nous désignerons par $\dot{x}^\alpha$ les dérivées. A la courbe C nous

ferons correspondre l'intégrale calculée le long de C

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_1} W(x^\alpha, \dot{x}^\beta)\, du,$$

où

$$W = \frac{ds}{du} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha = (g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha$$

est une fonction homogène et du premier degré des $\dot{x}^\alpha$.

Si l'on varie la courbe C, extrémités comprises, la variation correspondante de l'intégrale Φ est donnée par la formule (1)

$$\delta\Phi = [\omega(\delta)]_1 - [\omega(\delta)]_0 - \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{d}{du}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\right] \delta x^\alpha\, du, \tag{38.1}$$

où $\omega(\delta)$ se réduit, par suite de l'homogénéité de W, à la forme linéaire

$$\omega(\delta) = \frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}\delta x^\alpha.$$

Explicitons la formule (38.1) pour la fonction W donnée. Il vient

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta}{(g_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu)^{\frac{1}{2}}} - k\varphi_\alpha,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha g_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu}{(g_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu)^{\frac{1}{2}}} - k\partial_\alpha \varphi_\lambda \dot{x}^\lambda.$$

En reportant ces expressions dans (38.1) et en prenant pour paramètre u l'abscisse curviligne s de la courbe C, on peut mettre $\delta\Phi$ sous la forme

$$\delta\Phi = [\omega(\delta)]_1 - [\omega(\delta)]_0 - \int_{s_0}^{s_1} \left[\frac{d}{ds}(V_\alpha - k\varphi_\alpha) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu + k\partial_\alpha \varphi_\lambda v^\lambda\right] \delta x^\alpha\, ds, \tag{38.2}$$

où

$$\omega(\delta) = (V_\alpha - k\varphi_\alpha)\,\delta x^\alpha \tag{38.3}$$

et où V_α désigne le vecteur unitaire de la courbe (C).

39. *Le principe d'extremum.* — Appliquons la formule (38.2) au cas où la courbe C est variée à extrémités fixes. Dans ces conditions, la variation de l'intégrale Φ se réduit à

$$\delta\Phi = -\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds}(V_\alpha - k\varphi_\alpha) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu + k\partial_\alpha \varphi_\lambda v^\lambda\right] \delta x^\alpha\, ds$$

$$= -\int_{M_0}^{M_1} [v^\beta \nabla_\beta v_\alpha - k v^\beta F_{\beta\alpha}]\, \delta x^\alpha\, ds.$$

(1) *Cf.* par exemple LICHNEROWICZ, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale*, fasc. IV, 1941).

et les courbes qui réalisent l'extremum de Φ sont les solutions des équations différentielles

$$v^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = k F_{\alpha\beta} v^\alpha, \tag{39.1}$$

qui coïncident avec les équations différentielles (32.4) aux lignes de courant. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Pour tout schéma matière-champ électromagnétique homogène, les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale*

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_1} \left[(g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} - k \varphi_\alpha \dot{x}^\alpha \right] du.$$

40. *L'invariant intégral relatif.* — Soit

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha; \tag{40.1}_a$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = k F_{\alpha\beta} u^\alpha \tag{40.1}_b$$

le système différentiel aux lignes de courant du schéma envisagé. Considérons une suite continue à un paramètre σ de telles lignes de courant et limitons chaque ligne de courant à un arc $M_0 M_1$ variable avec σ. En vertu de la formule (32.2), la variation de l'intégrale Φ, quand on passe de la ligne (σ) à la ligne $(\sigma + \delta\sigma)$, est égale à

$$\delta\Phi = [\omega(\delta)]_{M_1} - [\omega(\delta)]_{M_0}.$$

Par conséquent, si notre suite forme un tube de lignes de courant sur lequel le point M_0 décrit une courbe fermée Γ_0 et le point M_1 une courbe fermée Γ_1, la variation totale de l'intégrale Φ, lorsqu'on revient à la ligne de courant initiale, est nulle et l'on a

$$\int_{\Gamma_1} [\omega(\delta)]_{M_1} = \int_{\Gamma_0} [\omega(\delta)]_{M_0}.$$

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème. — *Le système différentiel aux lignes de courant* (40.1) *admet l'invariant intégral relatif :*

$$\int \omega(\delta) = \int (u_\alpha - k\varphi_\alpha)\, \delta x^\alpha. \tag{40.2}$$

L'invariant intégral (40.2) fait intervenir le vecteur

$$i_\alpha = u_\alpha - k\varphi_\alpha.$$

Nous donnerons à ce vecteur i_α, le nom de *vecteur-impulsion* généralisé du schéma homogène considéré. Les lignes tangentes en chaque point au vecteur-impulsion sont appelées lignes d'impulsion.

41. *L'invariant intégral absolu à deux dimensions.* — De la forme différentielle linéaire

$$\omega(\delta) = (u_\alpha - k\varphi_\alpha)\,\delta x^\alpha,$$

on déduit par différentiation extérieure, la forme quadratique extérieure

$$D\omega = \Omega_{\alpha\beta}[\delta x^\alpha\,\delta x^\beta]$$

avec

$$\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha i_\beta - \partial_\beta i_\alpha = \partial_\alpha u_\beta - \partial_\beta u_\alpha - k F_{\alpha\beta}. \tag{41.1}$$

Si Δ désigne un domaine à deux dimensions limité à un contour fermé Γ, on a

$$\int_\Gamma \omega = \iint_\Delta D\omega;$$

on en déduit immédiatement le théorème.

Théorème. — *Le système différentiel aux lignes de courant* (40.1) *admet l'invariant intégral absolu.*

$$\iint_\Delta D\omega = \iint_\Delta \Omega_{\alpha\beta}\,\delta x^\alpha\,\delta x^\beta.$$

Au tenseur antisymétrique $\Omega_{\alpha\beta}$, nous donnons le nom *de tenseur de tourbillon généralisé* du schéma considéré.

42. *Schémas à mouvement rotationnel et à mouvement irrotationnel.* — Le système différentiel aux lignes de courant

$$\frac{dx^1}{u^1} = \frac{dx^2}{u^2} = \frac{dx^3}{u^3} = \frac{dx^4}{u^4}, \tag{42.1}$$

où u^α satisfait aux équations $(40\text{-}1)_k$, admet les invariants $\int\omega$ et $\iint D\omega$. Inversement cherchons à former tous les systèmes différentiels de la forme (42.1) admettant ces invariants intégraux. De la considération du système caractéristique de la forme, on déduit que, pour que le système différentiel

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = \frac{dx^4}{v^4}$$

laisse invariantes les formes ω et $D\omega$, il faut et il suffit que le vecteur V^β satisfasse au système linéaire

$$\Omega_{\alpha\beta}\,v^\beta = 0. \tag{42.2}$$

D'après un théorème classique sur la classe d'une forme quadratique extérieure, le système (42.2) est nécessairement de rang pair, et ce rang est inférieur à 4, puisqu'il existe un système différentiel laissant invariantes les formes ω et $D\omega$. Le système (42.2) est donc de rang 2 ou 0.

a. Si le système (42.2) est de rang 2, le schéma est dit *à mouvement rotationnel*. La forme $D\omega$ admet des variétés caractéristiques à deux dimensions, que l'on peut engendrer par des lignes de courant.

b. Si le système (42.2) est de rang 0, le schéma est dit à *mouvement irrotationnel*. Dans ce cas, le tenseur $\Omega_{\alpha\beta}$ est identiquement nul et les lignes *d'impulsion forment une congruence de normales*.

43. *Étude des schémas à mouvement rotationnel. Lignes de tourbillon.* — Plaçons-nous dans le cas d'un schéma à mouvement rotationnel et étudions les variétés caractéristiques à deux dimensions correspondantes. L'élément plan tangent à ces variétés sera complètement défini si nous connaissons, outre la direction u^α, une seconde direction de cet élément-plan, direction que nous choisirons orthogonale à la première. Nous sommes ainsi amenés à chercher un vecteur θ^β satisfaisant aux équations

$$\Omega_{\alpha\beta}\theta^\beta = 0, \qquad u_\beta \theta^\beta = 0.$$

Un calcul facile fournit pour ces équations la solution

$$\theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(-g)^{-\frac{1}{2}} u_\beta \Omega_{\gamma\delta}. \tag{43.1}$$

Le vecteur θ^α ainsi défini est le *vecteur-tourbillon* du schéma envisagé. Les lignes trajectoires du champ de vecteurs sont les *lignes de tourbillon*. Étant orthogonales aux lignes de courant, elles sont partout orientées dans l'espace. Le système différentiel

$$\frac{dx^1}{\theta^1} = \frac{dx^2}{\theta^2} = \frac{dx^3}{\theta^3} = \frac{dx^4}{\theta^4}$$

laissant invariantes les formes ω et $D\omega$, on en déduit immédiatement *une théorie complète des tourbillons*, analogue à celle de l'hydrodynamique classique ou relativiste (¹). En particulier la circulation du vecteur-impulsion est la même le long de tout circuit fermé tracé sur un tube de tourbillon et en faisant une fois le tour. Les variétés caractéristiques considérées admettent une double génération par les lignes de courant et par les lignes de tourbillon.

44. *Étude des schémas à mouvement irrotationnel.* — La propriété essentielle des mouvements irrotationnels est leur *permanence*, qui est fondée sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si le tenseur de tourbillon s'annule sur une hypersurface* S *partout orientée dans l'espace, il s'annule identiquement et le mouvement est irrotationnel :*

(¹) Cf. LICHNEROWICZ, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale Supérieure*, 1941, 58, fascicule 4).

D'après les considérations du paragraphe 42, le vecteur u^α satisfait au système linéaire

$$\Omega_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \tag{44.1}$$

Rapportons alors le schéma considéré à un système de référence tel que les lignes de temps coïncident avec les lignes de courant du schéma. Pour un tel système de référence

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0,$$

et il résulte du système (44.1)

$$\Omega_{11} = \Omega_{21} = \Omega_{31} = 0. \tag{44.2}$$

L'hypersurface S étant orientée dans l'espace, nous pouvons l'adopter désormais pour variété $x^4 = 0$. Comme le tenseur $\Omega_{\alpha\beta}$ est le rotationnel d'un champ de vecteurs, il satisfait au système

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \partial_\alpha \Omega_{\beta\gamma} = 0;$$

pour $\lambda = i$, ce système fournit, compte tenu de (44.2), les équations

$$\partial_4 \Omega_{23} = \partial_4 \Omega_{31} = \partial_4 \Omega_{12} = 0. \tag{44.3}$$

Les composantes Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} s'annulant sur S, il résulte des équations (44-3) que ces composantes sont identiquement nulles, ce qui démontre le théorème.

Ce théorème constitue l'extension à notre théorie du théorème de Lagrange de l'hydrodynamique classique.

45. *Mouvements permanents.* — Supposons l'espace-temps rapporté à un système de coordonnées quelconque (x^α) dans lequel la variable x^4 présente le caractère temporel. Nous dirons qu'un schéma matière pure-champ électromagnétique définit un *mouvement permanent* si les potentiels de gravitation et électromagnétiques $g_{\alpha\beta}$ et φ_α sont indépendants de la variable temporelle x^4.

Il résulte de l'étude antérieurement faite du problème de Cauchy que le vecteur u^α est indépendant de la variable x^4 et que, par suite, le système différentiel aux lignes de courant (42.1) admet la transformation infinitésimale

$$\partial f = \partial_1 X f.$$

De l'existence de la forme quadratique invariante

$$D\omega = |\, \partial i_\alpha, \partial x^\alpha \,|,$$

on déduit alors celle d'une forme linéaire invariante $D\omega(X, \partial)$, il vient

$$D\omega(X, \partial) = \frac{\partial (D\omega)}{\partial (\partial x^1)} = - \partial i_1.$$

Par suite la quantité i_λ est intégrale première du système (42-1) et, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Dans tout mouvement permanent, la composante* $i_\lambda = u_\lambda - k\varphi_\lambda$ *conserve une valeur constante le long de chaque ligne de courant.*

Plus généralement, i_λ demeure constant sur toute variété caractéristique de la forme et en particulier demeure constant le long de chaque ligne de tourbillon. Ces différents résultats constituent la transposition du théorème classique de Bernouilli.

46. *Cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique.* — Les résultats précédents s'étendent sans difficultés aux hypothèses du paragraphe 33, c'est-à-dire au cas d'un schéma fluide parfait-champ électromagnétique dont la pression p^* est supposée constante le long de toute la ligne de courant. Si ρ^* et p^* sont liés par une équation d'état, on peut établir les propositions suivantes :

Les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale

$$\overline{\Phi} = \int_{u_0}^{u_1} \left[\mathrm{F}(g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha \right] du,$$

où F désigne *l'indice* du fluide

$$\mathrm{F} = \exp. \int_{p_0}^{p^*} \frac{dp^*}{\rho^* + p^*}.$$

Le système différentiel correspondant des lignes de courant admet l'invariant intégral relatif défini par la forme linéaire

$$\overline{\omega} = (\mathrm{F}\mu_\alpha - k\varphi_\alpha)\,\delta x^\alpha.$$

La théorie des tourbillons, ainsi que celle des mouvements permanents s'en déduisent aisément.

VII. — Équations du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique.

47. *Le problème de raccordement.* — A l'intérieur d'un tube d'univers S considérons une distribution correspondant au schéma fluide parfait-champ électromagnétique, qui produit à l'intérieur de S un champ électromagnétique, $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$. A l'extérieur de S règnent des champs gravifiques et électromagnétiques, correspondant au schéma champ électromagnétique. Nous désignerons par $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ ce dernier champ électromagnétique. L'hypersurface S qui limite la distribution donnée doit nécessairement être engendrée par des lignes de courant de cette distribution.

Supposons d'abord comme au paragraphe 36, que les potentiels et champs gravifiques et électromagnétiques soient continus à la traversée de S. On en déduit, comme dans le cas du simple schéma fluide parfait, que la pression p^* doit s'annuler le long de S. Considérons en particulier le tube d'univers décrit par une très petite masse matérielle électrisée; p^* s'annulant sur S, il résulte des considérations du paragraphe 11 que le tenseur électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ est très petit à l'intérieur de S et tend identiquement vers zéro, quand on réduit le tube d'univers à une ligne d'univers. Ainsi dans ces hypothèses on n'obtient pas le modèle d'une très petite particule électrisée.

Nous sommes ainsi amenés à supposer que, à la traversée de S, le champ de gravitation reste continu, mais que le champ électromagnétique subit une discontinuité correspondant à la pression p^* non nulle sur S. La théorie correspondante de l'électron que nous allons maintenant esquisser sera dite *théorie de l'électron avec tensions mécaniques*.

48. *Une évaluation de la discontinuité du champ électromagnétique.* — Soit $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$ l'équation de S dans un système de coordonnées arbitraire. Nous rapporterons les deux champs considérés au système de coordonnées de Gauss relatif à S. La surface S est alors représentée par l'équation $x^4 = 0$, et l'on a

$$g_{4i} = 0, \qquad g_{44} = 1.$$

Les quantités S^i_k ne dépendant pas des dérivées obliques des données de Cauchy sur S, ces grandeurs ont, sur S, mêmes valeurs pour le champ intérieur et pour le champ extérieur. On en déduit l'égalité des composantes T^i_k et T^{*i}_k des tenseurs d'énergie de ces deux champs et par suite les équations

$$i = k; \qquad (\rho^* + p^*) u_i u^i - F^*_{ij} F^{*ij} = - F_{ij} F^{ij},$$

$$i = 4: \qquad (\rho^* + p^*) u_i u^i - p^* + \frac{1}{4} F^*_{ij} F^{*ij} - \frac{1}{2} F^*_{ij} F^{*ij} = \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}.$$

Or le tube S étant engendré par des lignes de courant, u^4 est nul et il vient

$$F^*_{ij} F^{*ij} = F_{ij} F^{ij}, \tag{48.1}$$

$$\frac{1}{4} F^*_{ij} F^{*ij} - \frac{1}{2} F^*_{ij} F^{*ij} = p^* + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}. \tag{48.2}$$

Pour évaluer la discontinuité de champ électromagnétique, nous poserons

$$F^{*\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + \alpha \varphi^{\alpha\beta}, \tag{48.3}$$

où α est scalaire de l'ordre de p^* et où $\varphi^{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique défini en coordonnées arbitraires par l'équation

$$\varphi^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \frac{g^{\rho\sigma} \partial_\sigma f \partial_\delta f}{\Delta_1 f}, \tag{48.4}$$

avec

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}[D(F_{\lambda\mu})]^{-\frac{1}{2}}, \tag{48.5}$$

$D(F_{\lambda\mu})$ désignant le déterminant des composantes $F_{\lambda\mu}$ du champ électromagnétique. En coordonnées de Gauss, la formule (48.4) fournit les composantes

$$\varphi^{ij} = \eta^{ijkl} F_{kl}; \qquad \varphi^{4l} = 0.$$

On en déduit aisément

$$\varphi_{ij} = \bar{\eta}_{ijkl} F^{kl}; \qquad \varphi_{4l} = 0,$$

avec

$$\bar{\eta}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}[D(F^{\lambda\mu})]^{-\frac{1}{2}}.$$

En reportant l'expression (48.3) du champ électromagnétique $F^{*\alpha\beta}$ dans les premiers membres des équations (48.1), il vient

$$F^*_{ij} F^{*kj} = (F_{ij} + \alpha\varphi_{ij}) F^{kj},$$

et comme

$$\varphi_{ij} F^{kj} = -\bar{\eta}_{ijkl} F^{jl} F^{kl} = 0,$$

les équations (48.1) sont identiquement vérifiées.

En procédant de même au premier membre de (48-2), il vient

$$\frac{1}{4} F^*_{ij} F^{*ij} - \frac{1}{2} F^*_{4i} F^{*4i} = \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{4i} F^{4i} + \frac{1}{2} \alpha (F_{ij} \varphi^{ij}) + \alpha^2 \varphi_{ij} \varphi^{ij},$$

or

$$\frac{1}{2} F_{ij} \varphi^{ij} = \frac{1}{2} \eta^{ijkl} F_{ij} F_{kl} = 1.$$

Par suite, pour $\alpha = p^*$, l'équation (48.2) est vérifiée à des termes en $(p^*)^2$ près. Il en résulte que nous adopterons, pour évaluer la discontinuité, la formule

$$F^{*\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + p^* \varphi^{\alpha\beta}. \tag{48.6}$$

49. *Équations de Maxwell vérifiées sur* S. — Nous supposerons dans la suite que p^* est une constante absolue, caractérisant l'électron considéré. Dans cette hypothèse, nous allons établir que les équations de Maxwell qui doivent être vérifiées sur S

$$D^4 \equiv \nabla_\lambda F^{*\lambda(4)} = 0, \tag{49.1}$$

$$E^4 \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} \nabla_i F^*_{jk} = 0 \tag{49.2}$$

le sont effectivement pour le champ électromagnétique défini par la formule (48.6).

Tout d'abord pour (49.1) il vient

$$D^4 \equiv \nabla_\lambda F^{*\lambda(4)} = p^* \nabla_\lambda \varphi^{\lambda(4)},$$

et les composantes de $\varphi^{\lambda\lambda}$ étant nulles,

$$\nabla_\lambda F^{*\lambda\lambda} = 0.$$

Passons à l'équation (49.2). Nous pouvons toujours supposer que le système de coordonnées sur S a été choisi de façon que sur S

$$D(F^{\alpha\beta}) = 1.$$

Dans ce système de coordonnées, l'on a

$$E^\lambda \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk\lambda}\nabla_i F^*_{jk} = \frac{1}{2}p^*\varepsilon^{ijk\lambda}\varepsilon_{jkh\lambda}\nabla_i F^{h\lambda},$$

soit

$$E^\lambda \equiv \frac{1}{2}p^*\delta^i_h\nabla_i F^{h\lambda} = 0.$$

Ainsi l'équation (49.2), elle aussi, se trouve vérifiée sur S. Dans l'hypothèse faite, le champ électromagnétique (48.6) est donc bien compatible avec les équations de Maxwell.

50. *Les équations du mouvement de l'électron (avec tension).* — Plaçons-nous de nouveau en coordonnées quelconques. En vertu des équations (33.2) et de l'hypothèse de la constance de p^*, les lignes de courant du champ intérieur à S satisfont au système différentiel.

$$u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta = kF^{*\alpha\beta}u_\alpha.$$

A la frontière le champ électromagnétique intérieur est donné par la formule (48.6), et les lignes de courant qui engendrent S satisfont aux équations

$$u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta = k\left[F^{\alpha\beta} + p^*\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\rho}\frac{g^{\rho\sigma}\partial_\sigma f\,\partial_\delta f}{\Delta_1 f}\right]u_\alpha.$$

Par passage à la limite on obtient les équations du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique donné

$$u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta = k[F^{\alpha\beta} + p^*\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\rho}V^\rho V_\delta]u_\alpha, \tag{50.1}$$

où $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est donné par la formule (48.5) et où V^ρ désigne le vecteur unitaire de la normale principale à la ligne d'univers considérée.

VIII. — Les équations macroscopiques de l'Électromagnétisme.

51. *Les valeurs moyennes des grandeurs électromagnétiques.* — Dans les domaines d'espace temps considérés, les potentiels et champs de gravitation ainsi que leurs dérivées premières varient relativement peu. Au contraire, comme nous l'avons déjà remarqué, les grandeurs microscopiques d'origine

électromagnétique qui interviennent dans les équations rigoureuses de la partie II subissent de grandes variations au sein des particules élémentaires ou dans leur voisinage. Pour caractériser macroscopiquement l'état électrodynamique de la matière, nous partirons comme dans la théorie classique des grandeurs microscopiques, et nous prendrons leur moyenne dans un domaine fini d'espace temps, par exemple dans la pseudo-sphère définie par

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\xi^\alpha - x^\alpha)^2 \leqq a^2,$$

de centre le point de coordonnées (x^α).

Pour obtenir de cette manière les grandeurs dites maxwelliennes, il nous faut supposer (¹) que le pseudo-rayon a été choisi de façon que les moyennes obtenues aient des valeurs indépendantes de a. Par suite on doit pouvoir traiter un nombre a tel que, d'une part, la pseudo-sphère de rayon a contienne un grand nombre de particules élémentaires et que, d'autre part, les grandeurs maxwelliennes varient infiniment peu à l'intérieur de cette sphère.

Dans cette hypothèse nous allons essayer de former les moyennes des différents membres des équations microscopiques (13.1) (14.1) (14.2). L'opération de dérivation, ordinaire ou covariante, par rapport aux variables x^α et celle de multiplication par le tenseur fondamental sont toutes deux échangeables avec l'opération de formation de la moyenne conformément à des notations classiques, nous désignerons par $\overline{f}$ la valeur moyenne de la fonction f.

52. *Le tenseur d'énergie et les équations d'Einstein.* — Dans la théorie macroscopique, intervient d'une manière essentielle le tenseur antisymétrique obtenu en prenant la valeur moyenne du champ électromagnétique

$$H_{\alpha\beta} = \overline{F}_{\alpha\beta}. \tag{52.1}$$

D'après la propriété de commutativité des opérations de multiplication par le tenseur fondamental et de formation de la moyenne, on a aussi

$$H^{\alpha\beta} = \overline{F}^{\alpha\beta}. \tag{52.2}$$

On donne au tenseur $H^{\alpha\beta}$ le nom de tenseur champ électrique-induction magnétique (en abrégé tenseur c. e. i. m).

Essayons de former les équations provenant des équations d'Einstein (13.1) en nous plaçant par exemple dans l'hypothèse d'un schéma matière-champ électromagnétique. Le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ étant quadratique par rapport au champ F, sa valeur moyenne ne peut s'exprimer seulement à l'aide du tenseur

(¹) Becker, *Théorie des électrons*, Paris, 1938, p. 123.

maxwellien $H_{\alpha\beta}$. Il est possible de montrer que l'on peut mettre le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho^{**} U_\alpha U_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} G_{\lambda\mu} H^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu}(G_{\lambda\alpha} H_{\mu\beta} + G_{\mu\beta} H_{\lambda\alpha}), \tag{52.3}$$

où U_α est un vecteur unitaire et $G_{\alpha\beta}$ un tenseur antisymétrique. A ce tenseur on donne le nom de tenseur *induction électrique-champ magnétique* (en abrégé tenseur i. e. c. m). Dans un grand nombre d'interprétations physiques s'introduit le tenseur

$$M_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}, \tag{52.4}$$

qui sera dit le tenseur *d'aimantation-polarisation* du milieu considéré. Dans ces conditions les équations d'Einstein macroscopiques prendront la forme

$$S_{\alpha\beta} = \chi \overline{T}_{\alpha\beta}, \tag{52.5}$$

où $\overline{T}_{\alpha\beta}$ est défini par l'équation (52.3).

53. *Les équations de Maxwell.* — Les équations (14.1) et (14.2) étant linéaires par rapport aux composantes $F_{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique, la formation des équations macroscopiques correspondantes ne présente aucune difficulté. Des équations (14.1), complétées par l'hypothèse de transfert de Lorentz

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu u^\beta,$$

on déduit immédiatement

$$\nabla_\alpha H^{\alpha\beta} = \overline{\mu u^\beta}.$$

En exprimant le tenseur $H^{\alpha\beta}$ en fonction du tenseur i. e. c. m. $G^{\alpha\beta}$ et du tenseur d'aimantation-polarisation à l'aide de la formule (52.4), on obtient

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \overline{\mu u^\beta} + \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}.$$

Nous poserons

$$S^\beta = \overline{\mu u^\beta} + \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}. \tag{53.1}$$

Il vient ainsi le premier groupe des équations de Maxwell macroscopiques

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = S^\beta, \tag{53.2}$$

où le vecteur S^β est dit vecteur-courant macroscopique.

Des équations (14.2), on déduit le second groupe d'équations de Maxwell macroscopiques

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0. \tag{53.3}$$

54. *Le vecteur courant macroscopique.* — Le vecteur courant macroscopique, défini par l'équation (53.1), provient du courant électronique $\overline{\mu u^\beta}$ et du courant

d'aimantation-polarisation $\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}$. Ce vecteur S^β peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une somme de deux vecteurs, dont l'un est colinéaire au vecteur vitesse macroscopique U^β et l'autre lui est orthogonal. Nous poserons donc

$$S^\beta = C^\beta + L^\beta, \tag{54.1}$$

avec

$$C^\beta = \mu^* U^\beta, \qquad L^\beta U_\beta = 0. \tag{54.2}$$

Le vecteur C^β est appelé courant de convection et le vecteur L^β courant de conduction. Au scalaire

$$\mu^* = S^\beta U_\beta, \tag{54.3}$$

nous donnerons le nom de densité maxwellienne de charge.

55. *Les équations de liaison.* — Aux équations d'Einstein et de Maxwell, il nous faut adjoindre les équations de liaison permettant d'évaluer le tenseur c. e. i. m. $H^{\alpha\beta}$ et le tenseur i. e. c. m. $G^{\alpha\beta}$, l'un à partir de l'autre et permettant de calculer le vecteur-courant macroscopique. A partir de la théorie classique (¹), on obtient tout d'abord entre $H^{\alpha\beta}$ et $G^{\alpha\beta}$ les équations de liaison

$$G^{\alpha\beta} U_\beta = l H^{\alpha\beta} U_\beta, \tag{55.1}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} H_{\alpha\beta} U_\gamma = m\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha\beta} U_\gamma, \tag{55.2}$$

où le scalaire l désigne le pouvoir diélectrique et le scalaire m est la perméabilité magnétique du milieu considéré.

Pour évaluer le vecteur S^α, il nous suffit, compte tenu de (54.1) et (54.2), d'évaluer le courant de conduction L^α. Nous poserons

$$L^\alpha = \sigma H^{\alpha\beta} U_\beta, \tag{55.3}$$

où σ désigne la conductibilité électrique du milieu.

Les scalaires l, m, σ étant donnés dans le domaine d'espace-temps considéré, on peut faire pour les équations (52.1), (52.2), (53.3), complétées par (54.1), (54.2), (55.1), (55.2), (55.3), une étude du problème de Cauchy en tout point analogue à celle du paragraphe 35.

Quant aux lignes de courant macroscopiques, trajectoires des vecteurs U^α, on peut montrer qu'elles sont géodésiques d'un espace de Finsler généralisé, tel que ceux que j'ai étudiés dans deux Notes récentes (²). Je me propose de revenir sur cette question dans un travail ultérieur.

(¹) Cf. Becker, *Théorie des électrons*, Paris, 1938, p. 364.

(²) Cf. Lichnerowicz, *Comptes rendus*, 214, 1942, p. 599; 216, 1943, p. 25.

BIBLIOGRAPHIE.

BECKER, *Théorie des électrons*, trad. Lubin; Paris, 1938.

E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1922.

EISENHART, *Trans. of the Americ. Math. Soc.*, 1924, p. 206.

HILBERT, *Math. Annalen*, **92**, 1924, p. 11.

LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste* (*Actual. Scient. Ind.*, n° 833, Hermann, Paris, 1939; *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale Sup.*, 1941, fasc. IV); *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, sous presse au *Journal de Mathématiques pures et appliquées; Comptes rendus*, **209**, 1939, p. 533; **212**, 1941, p. 421.

STELLMACHER, *Math. Annalen*, **115**, 1937, p. 136.

SYNGE, *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, **43**, 1937, p. 385.

ERRATA

J. Haag. — *Étude asymptotique des oscillations de relaxation* (*Annales École Normale* [3], tome LX, p. 35) :

Page 49, formule (40), *lire* s^r, *au lieu de* s'.

» 64, formule (93), *lire* $-$ *au lieu de* $+$.

» 64, formule (94), *lire* s_1 *au lieu de* s à la borne supérieure de l'intégrale ; *lire* $n = 1$, *au lieu de* $n + 1$ sous le signe Σ.

» 78, ligne 8, *lire* ζ *au lieu de* ξ.

» 81, formule (129), *lire* ξ *au lieu de* ζ.

» 82, formule (132), *lire* $-$ et $-$ *au lieu de* $+$ et $+$.

» 84, formule (136), *lire* $2\,A_0 a N_1$ *au lieu de* N_1.

» 85, formule (137), *lire* P_1 *au lieu de* P_4.

» 85, formule (138), *supprimer* la formule donnant P_4.

» 87, formule (141), *lire* P_1 *au lieu de* P_4.

» 90, dans la formule donnant n_{10}, la borne inférieure de la deuxième intégrale est 1 *au lieu de* 0.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTIÈME.

Pages.

Sur une classe d'espaces de Weyl; par M. *Elie Cartan*..... 1

Sur les courbes de Ribaucour et sur les réseaux conjugués géodésio-coniques; par M. *Paul Vincensini*..... 17

Étude asymptotique des oscillations de relaxation; par M. *J. Haag*..... 35

Sur des propriétés de représentations permutables et des généralisations d'un théorème de Borsuk; par M. *Guy Hirsch*..... 113

Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions; par M. *Max Eger*..... 143

Sur l'arithmétique des quaternions et des biquaternions; par M. *Gaston Benneton*. 173

Les ensembles surconvexes plans; par M. *E. Blanc*..... 215

Sur les équations relativistes de l'électromagnétisme; par M. *André Lichnerowicz*. 247

Errata..... 289

Table des Matières..... 291